

DYNAMIQUE DES APPLICATIONS RATIONNELLES

MARC ABBOUD

TABLE DES MATIÈRES

1. Préliminaires	3
1.1. La sphère de Riemann	3
1.2. Applications rationnelles	6
1.3. Familles normales	9
1.4. Exercices	10
2. Les ensembles de Fatou et de Julia	11
2.1. Définitions et invariance	11
2.2. Points périodiques	12
2.3. Propriétés de l'ensemble de Julia	14
2.4. Le cas polynomial	16
2.5. Exercices	17
3. Éléments de théorie du potentiel	17
3.1. Fonctions harmoniques et sous-harmoniques	18
3.2. Potentiels logarithmiques	22
3.3. Énergie, capacité et mesure d'équilibre	24
3.4. Fonction de Green d'un compact	27
3.5. Exercices	29
4. La fonction de Green d'un polynôme	29
4.1. Construction	29
4.2. La mesure d'équilibre	31
4.3. Coordonnée de Böttcher et critère de connexité	32
4.4. Exercices	33
5. Théorèmes d'équidistribution	34
5.1. L'opérateur de transfert	34
5.2. Unicité de la mesure équilibrée	35
5.3. Le théorème de Brolin	36
5.4. Équidistribution des points périodiques	38
5.5. Exercices	39
6. Entropie, exposants de Lyapunov et fractions rationnelles	39

Date: 2026-2027.

6.1.	Mélange	39
6.2.	Entropie	40
6.3.	Exposant de Lyapunov et formule de Manning	41
6.4.	Le cas des fractions rationnelles	42
6.5.	Exercices	43
Annexe A. Rappels d'analyse complexe et d'analyse fonctionnelle		43
A.1.	Fonctions holomorphes	44
A.2.	Zéros, indice et théorème de Rouché	45
A.3.	Le lemme de Schwarz et la métrique de Poincaré	45
A.4.	Convergence uniforme sur les compacts et théorème d'Ascoli	46
A.5.	Mesures, dualité et convergence faible	47
A.6.	Exercices	48
Références		49

Ce cours est une introduction à la dynamique des applications polynomiales et rationnelles d'une variable complexe. Étant donné un polynôme f de degré $d \geq 2$, on s'intéresse au comportement asymptotique des itérées $f^n = f \circ \dots \circ f$, et la première chose que l'on découvre est que le plan se scinde en deux parties de natures opposées : un ouvert $\mathcal{F}(f)$ où la dynamique est stable et où deux points voisins ont des orbites voisines, et un compact $\mathcal{J}(f)$ où elle est chaotique. Le chapitre A rassemble, sans démonstration et à titre de référence, les résultats d'analyse complexe et d'analyse fonctionnelle utilisés dans la suite : principe du maximum, théorème de Rouché, lemme de Schwarz, théorème d'Ascoli, compacité faible des mesures. Le chapitre 1 rassemble les préliminaires proprement dits : la sphère de Riemann, le degré d'une application rationnelle, et surtout la notion de *famille normale* et les théorèmes de Montel, qui sont l'outil de base de toute la théorie. Le chapitre 2 construit les ensembles de Fatou et de Julia et en établit les propriétés fondamentales : invariance totale, minimalité, densité des cycles répulsifs. Le chapitre 3 est un cours accéléré de théorie du potentiel dans le plan : fonctions sous-harmoniques, mesure de Riesz, potentiels logarithmiques, capacité et mesure d'équilibre d'un compact. Ces deux fils se rejoignent au chapitre 4, où l'on associe à tout polynôme sa *fonction de Green* G_f : elle est à la fois la fonction de Green du compact K_f des orbites bornées et un objet dynamique, caractérisé par l'équation fonctionnelle $G_f \circ f = d G_f$. Son laplacien est la *mesure d'équilibre* μ_f , dont le chapitre 5 montre qu'elle décrit la répartition asymptotique des préimages d'un point et des points périodiques. Le chapitre 6 relie enfin μ_f à l'entropie et aux exposants de Lyapunov, et explique comment tout ce qui précède s'étend aux fractions rationnelles.

Les prérequis sont un cours d'analyse complexe à une variable et les rudiments de la théorie de la mesure et de l'analyse fonctionnelle ; tous les énoncés dont nous aurons besoin sont rappelés au

chapitre A. Aucune connaissance préalable en systèmes dynamiques n'est supposée. Les démonstrations laissées au lecteur sont signalées comme telles ; les énoncés admis sont clairement identifiés et accompagnés d'une référence.

Convention de notation. La lettre f désigne toujours l'application que l'on itère, $d = \deg f \geq 2$ son degré, et f^n sa n -ième itérée pour la composition (jamais une puissance : la puissance n -ième est notée $f(z)^n$). Les lettres z, w sont réservées aux variables de $\mathbf{C}$, les lettres a, b, c aux points que l'on fixe dans un énoncé, la lettre c étant plus spécifiquement réservée aux points critiques. Les lettres U, V, W désignent des ouverts, K un compact, μ, ν, σ des mesures. On note $\mathbb{D}(a, r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - a| < r\}$ le disque ouvert, $\overline{\mathbb{D}}(a, r)$ le disque fermé, $\mathbb{D} = \mathbb{D}(0, 1)$ le disque unité et $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ le cercle unité. Enfin Leb désigne la mesure de Lebesgue du plan.

1. PRÉLIMINAIRES

Ce chapitre rassemble le matériel dont nous nous servons constamment : la géométrie de la sphère de Riemann, les propriétés élémentaires des applications rationnelles vues comme revêtements ramifiés, et la théorie des familles normales. Le résultat central est le *grand théorème de Montel* (théorème 1.16) : une famille d'applications holomorphes qui évitent trois valeurs fixées est normale. C'est un énoncé de compacité obtenu à partir d'une information purement ensembliste, et c'est ce mécanisme, appliqué encore et encore, qui produira au chapitre 2 la quasi-totalité des propriétés de l'ensemble de Julia.

1.1. La sphère de Riemann. Itérer un polynôme f de degré $d \geq 2$, c'est d'abord constater que les orbites de module assez grand tendent vers l'infini : l'infini est un point fixe, et c'est même le point fixe le plus visible du système. Travailler dans $\mathbf{C}$ oblige alors à traiter à part un point qui, dynamiquement, n'a rien de particulier, et prive d'un outil essentiel : la compacité. Nous commençons donc par construire soigneusement l'espace sur lequel toute la théorie se déroule. Cette construction admet trois descriptions, qui seront toutes utiles : un recollement de deux plans, la droite projective, et la sphère unité de $\mathbf{R}^3$.

Deux plans recollés. Considérons deux exemplaires de $\mathbf{C}$, notés U_0 et U_1 , dont on appelle z la coordonnée sur le premier et w la coordonnée sur le second. Sur l'union disjointe $U_0 \sqcup U_1$, identifions le point $z \in U_0 \setminus \{0\}$ au point $w \in U_1 \setminus \{0\}$ lorsque

$$w = \frac{1}{z}. \quad (1)$$

Le quotient obtenu est la *sphère de Riemann*, notée $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

Il faut prendre le temps de voir ce que cette opération produit. Le recollement identifie $U_0 \setminus \{0\}$ à $U_1 \setminus \{0\}$, mais laisse deux points non appariés : l'origine de U_0 et l'origine de U_1 . Si l'on convient de regarder U_0 comme « le » plan complexe, alors $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est $\mathbf{C}$ augmenté d'un unique point supplémentaire, à savoir l'origine de U_1 , que l'on note ∞ ; et (1) dit que les points de $\mathbf{C}$ de très grand module

sont, vus dans la carte w , très proches de 0 :

$$\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}, \quad \infty = (w = 0). \quad (2)$$

Mais rien n'oblige à privilégier U_0 : en regardant U_1 comme « le » plan, c'est l'origine de U_0 qui devient le point à l'infini. La construction est parfaitement symétrique, et c'est là tout son intérêt : *le point ∞ n'est pas une singularité, c'est un point ordinaire vu dans une mauvaise carte.*

L'application de transition $z \mapsto 1/z$ est un biholomorphisme de $\mathbf{C}^*$ sur $\mathbf{C}^*$. Les deux cartes (U_0, z) et (U_1, w) font donc de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ une surface de Riemann, c'est-à-dire une variété complexe de dimension 1 : une fonction définie au voisinage d'un point de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est dite holomorphe si elle l'est lue dans l'une des cartes, et la condition ne dépend pas de la carte choisie précisément parce que (1) est holomorphe. Concrètement :

Définition 1.1. Une fonction f définie au voisinage de ∞ est *holomorphe en ∞* si $w \mapsto f(1/w)$ se prolonge holomorphiquement en $w = 0$. Une application f est *holomorphe à valeurs ∞ en a* si $z \mapsto 1/f(z)$ est holomorphe et nulle en a .

Exemple 1.2. Lue dans la carte $w = 1/z$, l'application $f(z) = z^d$ devient $w \mapsto w^d$: elle fixe ∞ avec le même comportement local qu'en 0, et ∞ est un point critique de degré local d . L'application $f(z) = z + 1$ devient $w \mapsto \frac{w}{1+w} = w - w^2 + \dots$: elle fixe ∞ avec dérivée 1, c'est un point fixe parabolique, ce que la lecture dans la carte z ne laissait nullement deviner. Enfin $f(z) = 1/z$ devient $w \mapsto 1/w$: c'est une involution qui échange 0 et ∞ .

Proposition 1.3. On munit $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ de la topologie provenant du quotient $U_0 \cup U_1 / (z \simeq \frac{1}{w})$. Alors $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est compact.

Démonstration. Une base de la topologie est donnée par les disques $\mathbb{D}(a, r)$ dans la carte U_0 et la carte U_1 . Soit $V_i \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ un recouvrement par des ouverts. Il existe $\varepsilon > 0$ et un indice i_0 tel que le disque $\mathbb{D}(0, \varepsilon)$ de la carte U_1 (c'est à dire un disque centré sur le point ∞) soit contenu dans V_{i_0} . Mais alors le complémentaire de $\mathbb{D}(0, \varepsilon) \subset U_1$ est exactement

$$Y := \overline{\mathbb{D}(0, \frac{1}{\varepsilon})} \subset U_0 \quad (3)$$

c'est à dire les nombres complexes z tels que $|z| \leq \frac{1}{\varepsilon}$ qui est une partie compacte. Donc on sait qu'il existe $i_1, \dots, i_r$ tel que

$$Y = (Y \cap V_{i_1}) \cup \dots \cup (Y \cap V_{i_r}) \quad (4)$$

et alors

$$\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = V_{i_0} \cup V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_r}. \quad (5)$$

□

Coordonnées homogènes. La description précédente est commode pour calculer, mais elle demande de choisir une carte et brise donc la symétrie que l'on vient de gagner. La description projective la rétablit.

Sur $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$, considérons la relation d'équivalence $v \sim \lambda v$ pour $\lambda \in \mathbf{C}^*$, c'est-à-dire « être sur la même droite vectorielle », et notons

$$\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = (\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}) / \mathbf{C}^*, \quad \pi(Z, W) = [Z : W], \quad (6)$$

l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbf{C}^2$. Les nombres Z et W sont les *coordonnées homogènes* du point $[x : y]$: ils ne sont définis qu'à un facteur commun près, de sorte qu'aucune fonction de $[x : y]$ n'a de sens si elle n'est pas invariante par $(Z, W) \mapsto (\lambda Z, \lambda W)$, mais les *rapports* et les *annulations* en ont un.

Une droite est déterminée par sa pente, ce qui donne les deux cartes naturelles

$$V_0 = \{W \neq 0\}, \quad z = \frac{Z}{W}, \quad V_1 = \{Z \neq 0\}, \quad w = \frac{W}{Z}, \quad (7)$$

chacune en bijection avec $\mathbf{C}$, et dont la réunion est $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ tout entier puisque Z et W ne peuvent s'annuler simultanément. Sur l'intersection $V_0 \cap V_1 = \{xy \neq 0\}$, les deux coordonnées sont liées par

$$w = \frac{W}{Z} = \frac{1}{z}, \quad (8)$$

qui est exactement le recollement (1). Les deux constructions coïncident donc, et l'on dispose d'un dictionnaire :

$$z \in \mathbf{C} \longleftrightarrow [z : 1], \quad \infty \longleftrightarrow [1 : 0]. \quad (9)$$

Le point à l'infini est la droite $\{W = 0\}$, et l'on voit sur (6) qu'elle ne se distingue en rien des autres droites de $\mathbf{C}^2$.

Remarque 1.4. Les coordonnées homogènes ne sont pas qu'une élégance de présentation. Elles permettent d'abord de faire agir $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ par applications linéaires, ce qui donne le groupe des automorphismes sans calcul. Elles permettent surtout de *relever* une application rationnelle en une application polynomiale homogène de $\mathbf{C}^2$, procédé qui remplacera au chapitre 6 la fonction de Green des polynômes lorsque aucun point fixe ne pourra être envoyé à l'infini.

La sphère, la distance sphérique. La troisième description est métrique. La *projection stéréographique* depuis le pôle nord identifie la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ privée du pôle à $\mathbf{C}$; en envoyant le pôle nord sur ∞ , elle s'étend en une bijection $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, laquelle est un difféomorphisme dans les deux cartes. On peut donc transporter sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ la distance euclidienne de $\mathbf{R}^3$ restreinte à $\mathbb{S}^2$: c'est la *distance sphérique*

$$\sigma(p, q) = \frac{2|p - q|}{\sqrt{1 + |p|^2} \sqrt{1 + |q|^2}}, \quad \sigma(p, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |p|^2}}. \quad (10)$$

Elle provient, à quasi-isométrie près, de la *métrique sphérique* $\rho_{\mathbf{P}^1(\mathbf{C})}(z) |dz| = \frac{2|dz|}{1+|z|^2}$, laquelle est bien définie sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ tout entier : dans la carte $w = 1/z$ elle s'écrit $\frac{2|dw|}{1+|w|^2}$, c'est-à-dire la même expression. En coordonnées homogènes, elle se lit encore plus simplement :

$$\sigma([x:y], [x':y']) = \frac{2|xy' - x'y|}{\|(x,y)\| \|(x',y')\|}, \quad (11)$$

formule manifestement invariante par $(x,y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ et symétrique en les deux points.

Proposition 1.5. *Muni de la distance sphérique, $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est un espace métrique compact, connexe, et la topologie induite sur $\mathbf{C}$ est la topologie usuelle. Une suite (z_n) de $\mathbf{C}$ converge vers ∞ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ si et seulement si $|z_n| \rightarrow \infty$.*

Démonstration. Comme la topologie usuelle sur $\mathbf{C}$ est métrique, il suffit de montrer qu'une suite de nombres complexes z_n converge p pour la topologie usuelle si et seulement si elle converge pour la distance sphérique. Tout d'abord on a que pour tout $p, q \in \mathbf{C}$, $\sigma(p, q) \leq |p - q|$ donc la topologie de la distance sphérique est plus fine. Prenons maintenant une suite de points p_n qui converge vers $p \in \mathbf{C}$ pour la distance sphérique. Montrons que $|p_n - p| \rightarrow 0$. On montre que $|p_n|$ est borné. En effet si ce n'est pas le cas alors quitte à extraire on aurait que $|p_n| \rightarrow +\infty$ et alors

$$\sigma(p_n, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1 + |p_n|^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (12)$$

et on aurait que (p_n) converge vers $\infty \neq p$ pour la distance sphérique ce qui est absurde. Donc la suite $|p_n|$ est bornée et donc

$$\sigma(p_n, p) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow |p_n - p| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (13)$$

□

On a donc une compactification naturelle de $\mathbf{C}$ qui permet de donner un sens au fait de « converger vers l'infini ». Signalons enfin la *dérivée sphérique*

$$f^\#(z) = \frac{|f'(z)| (1 + |z|^2)}{1 + |f(z)|^2} = \lim_{w \rightarrow z} \frac{\sigma(f(w), f(z))}{\sigma(w, z)}, \quad (14)$$

qui mesure la dilatation de f pour la métrique sphérique et reste finie même aux pôles de f ; c'est elle qui intervient dans le critère de Marty (exercice 1.22).

1.2. Applications rationnelles.

Définition 1.6. Une *application rationnelle* est une application holomorphe $f : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

Le nom est justifié par le résultat suivant, qui dit qu'il n'y a pas d'autres applications holomorphes de la sphère dans elle-même que celles que l'on connaît déjà.

Proposition 1.7. *Soit $f : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ holomorphe non constante. Alors il existe deux polynômes P, Q sans facteur commun tels que $f(z) = P(z)/Q(z)$ pour tout z hors des zéros de Q . L'entier $\deg f = \max(\deg P, \deg Q)$ ne dépend pas de l'écriture ; on l'appelle le degré de f .*

Démonstration. L'ensemble $f^{-1}(\infty)$ est discret dans le compact $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, donc fini. Quitte à conjuguer par une homographie, supposons $\infty \notin f^{-1}(\infty)$; alors f est holomorphe de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, avec un nombre fini de pôles $a_1, \dots, a_r$ d'ordres $m_1, \dots, m_r$. La fonction $g(z) = f(z) \prod_i (z - a_i)^{m_i}$ est entière. Comme f est holomorphe en ∞ à valeurs dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, la fonction $w \mapsto f(1/w)$ est méromorphe en 0, donc $|f(z)| = O(|z|^k)$ pour un certain k quand $|z| \rightarrow \infty$; il en résulte que $|g(z)| = O(|z|^{k+\sum_i m_i})$, et g est un polynôme par le corollaire A.2. Il ne reste qu'à simplifier la fraction obtenue. $\square$

En coordonnées homogènes, l'écriture est plus symétrique et plus maniable. Si $f = P/Q$ avec P, Q sans facteur commun et $d = \deg f$, posons

$$\tilde{P}(x, y) = y^d P(x/y), \quad \tilde{Q}(x, y) = y^d Q(x/y), \quad (15)$$

deux polynômes *homogènes* de degré d en (x, y) , sans facteur commun ; alors

$$f([x : y]) = [\tilde{P}(x, y) : \tilde{Q}(x, y)], \quad (16)$$

et cette écriture a un sens partout, y compris en $[1 : 0]$.

Exemple 1.8. Le polynôme $f(z) = z^2 + c$ s'écrit $f([x : y]) = [x^2 + cy^2 : y^2]$. On lit sur cette formule que $f([1 : 0]) = [1 : 0]$ et que le degré local en $[1 : 0]$ vaut 2 : en coordonnées homogènes, le comportement à l'infini se calcule comme partout ailleurs. Plus généralement, f est un polynôme de degré d si et seulement si $\tilde{Q} = y^d$.

Proposition 1.9. *Les applications rationnelles de degré 1 sont les homographies*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (17)$$

c'est-à-dire les applications induites par les éléments de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ agissant linéairement sur les coordonnées homogènes. Elles forment le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{P}^1(\mathbf{C})) = \mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$ des automorphismes de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, lequel agit transitivement et librement sur les triplets de points distincts.

La dernière assertion sera utilisée constamment : elle permet, dans toute démonstration, de placer trois points où l'on veut, typiquement en 0, 1 et ∞ .

Définition 1.10. Soient f une application rationnelle non constante et $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Le *degré local* $\deg_a f$ est l'unique entier $k \geq 1$ tel que, dans des cartes centrées en a et en $f(a)$, l'application f s'écrive $\zeta \mapsto \zeta^k u(\zeta)$ avec u holomorphe et $u(0) \neq 0$. Un point a tel que $\deg_a f \geq 2$ est appelé *point critique*, et son image une *valeur critique*. On note $\mathrm{Crit}(f)$ l'ensemble des points critiques de f .

Cette définition est licite : changer de carte au départ ou à l'arrivée revient à composer par un biholomorphisme, ce qui ne modifie pas l'ordre d'annulation. Autrement dit $\deg_a f$ est l'ordre d'annulation de $f - f(a)$ en a , lu dans des cartes ; en la carte z et pour $f(a) \neq \infty$, c'est simplement $1 + \mathrm{ord}_a(f')$. Il s'avère que le degré local compte les préimages.

Proposition 1.11. *Soit f une application rationnelle de degré $d \geq 1$. Pour tout $b \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$,*

$$\sum_{a \in f^{-1}(b)} \deg_a f = d. \quad (18)$$

En particulier f est surjective, tout point a au plus d préimages, et f est un revêtement de degré d au-dessus de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ privé de l'ensemble fini des valeurs critiques. De plus $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.

Démonstration. On écrit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$. Soit $b \in \mathbf{C}$, on peut supposer quitte à composer f par une homographie que $\infty \notin f^{-1}(b)$, donc toutes les préimages de b sont dans $\mathbf{C}$. On a alors

$$f(z) = b \Leftrightarrow R(z) = P(z) - bQ(z) = 0. \quad (19)$$

On voit que R est un polynôme de degré d . En effet, sinon cela voudrait dire que $P(z)$ et $bQ(z)$ ont même degré et même coefficient dominant mais alors $f(\infty) = b$ ce qu'on a exclu. On a donc que les préimages de b sont exactement les racines de R . Montrons que la multiplicité $\deg_a f$ est exactement la multiplicité de la racine. On peut supposer $a = 0$ et notons k la multiplicité de la racine a et alors

$$R(z) = P(z) - bQ(z) = z^k + h(z) \quad (20)$$

avec $h(z)$ un polynôme divisible par z^{k+1} . Et alors localement en $a = 0$:

$$f(z) = \frac{bQ(z) + z^k + h(z)}{Q(z)} = b + \frac{1}{Q(z)}z^k + \frac{1}{Q(z)}h(z). \quad (21)$$

Comme $b \neq \infty$ on a que $Q(a) \neq 0$ et donc $\frac{1}{Q}$ est holomorphe au voisinage de a , ainsi on voit que $\deg_a f = k$. $\square$

Proposition 1.12 (Formule de Riemann–Hurwitz). *Soit f une application rationnelle de degré $d \geq 1$. Alors*

$$\sum_{a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})} (\deg_a f - 1) = 2d - 2. \quad (22)$$

En particulier f possède au plus $2d - 2$ points critiques.

Démonstration. Tout d'abord on conjugue f par une homographie pour supposer que ∞ ne soit pas un point critique de f . Ensuite on compose f par une homographie pour supposer que $f(\infty) = \infty$. Ainsi f est de la forme

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (23)$$

avec $\deg(P) = \deg(Q) + 1$ et Q est scindé à racines simples. Sur $\mathbf{C}$, $\deg_a f - 1$ est l'ordre d'annulation en a de $f' = (P'Q - PQ')/Q^2$, dont le numérateur est un polynôme de degré au plus $2d - 2$. Si on écrit $P = p_d z^d + \dots$ et $Q = q_{d-1} z^{d-1} + \dots$ avec $d = \deg P$, alors le coefficient de z^{2d-2} est

$$(\deg P - \deg Q) p_d q_{d-1} = p_d q_{d-1} \neq 0. \quad (24)$$

Le numérateur a donc exactement $2d - 2$ racines comptées avec multiplicité, et aucune n'est un zéro de Q . Comme ∞ n'est pas critique, on obtient (22). $\square$

Nous nous intéresserons surtout au cas polynomial, qui se caractérise ainsi.

Proposition 1.13. *Une application rationnelle f de degré $d \geq 1$ est (conjuguée par une homographie à) un polynôme si et seulement s'il existe $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ tel que $f^{-1}(a) = \{a\}$.*

Démonstration. Si f est un polynôme de degré d alors $f^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ et $\deg_{\infty} f = d$. Réciproquement, si $f^{-1}(a) = \{a\}$, conjuguons par une homographie envoyant a sur ∞ : la nouvelle application g vérifie $g^{-1}(\infty) = \{\infty\}$, donc g est holomorphe de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ et se prolonge en ∞ : c'est une fonction entière avec un pôle à l'infini, c'est-à-dire un polynôme. $\square$

Si $f(z) = a_d z^d + \dots + a_0$ est un polynôme de degré $d \geq 2$, la conjugaison par l'homothétie $z \mapsto \lambda z$ remplace a_d par $\lambda^{d-1} a_d$, et la conjugaison par une translation permet d'annuler a_{d-1} . Toute la dynamique polynomiale peut donc, quitte à conjuguer, être ramenée au cas *unitaire et centré*, et nous ferons souvent cette hypothèse pour alléger les formules.

1.3. Familles normales.

Définition 1.14. Soit $U \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ un ouvert et $\mathcal{F}$ une famille d'applications holomorphes de U dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. On dit que $\mathcal{F}$ est *normale* si de toute suite d'éléments de $\mathcal{F}$ on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de U , pour la distance sphérique σ . On dit que $\mathcal{F}$ est *normale au point* $a \in U$ s'il existe un voisinage de a sur lequel $\mathcal{F}$ est normale.

Insistons sur deux points. D'abord la convergence a lieu vers une application continue $U \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, qui est automatiquement holomorphe, mais qui peut être constante, y compris constante égale à ∞ . Ensuite la normalité est une propriété *locale* : la famille est normale sur U si et seulement si elle est normale en chaque point de U , ce qui résulte d'un argument diagonal et de la séparabilité de U . L'ensemble des points de normalité est donc, par construction, un ouvert.

Le lien avec la compacité est fourni par le théorème d'Ascoli (théorème A.17) : puisque $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est compact, une famille est normale si et seulement si elle est équicontinue en tout point pour la distance σ . C'est cette dernière formulation qui exprime le mieux la notion de *stabilité dynamique* : la famille (f^n) est normale en a si et seulement si les orbites des points voisins de a restent uniformément voisines de celle de a pendant tout le temps.

Théorème 1.15 (Petit théorème de Montel). *Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions holomorphes $U \rightarrow \mathbf{C}$ uniformément bornée sur tout compact de U . Alors $\mathcal{F}$ est normale.*

Démonstration. Soient $K \subset U$ compact et $r > 0$ tel que le $2r$ -voisinage de K soit inclus dans un compact $L \subset U$, et soit $M = \sup_{\mathcal{F}} \sup_L |f|$. Pour $a, b \in K$ avec $|a - b| \leq r$, la formule de Cauchy sur le cercle $\partial\mathbb{D}(a, 2r)$ donne

$$|f(a) - f(b)| = \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\mathbb{D}(a, 2r)} f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - a} - \frac{1}{\zeta - b} \right) d\zeta \right| \leq \frac{2M}{r} |a - b|. \quad (25)$$

La famille est donc équicontinue sur K et bornée ; le théorème A.17 conclut. $\square$

Théorème 1.16 (Grand théorème de Montel). *Soient $U \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ un ouvert et a, b, c trois points distincts de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Alors la famille de toutes les applications holomorphes $U \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{a, b, c\}$ est normale.*

Nous admettons ce théorème, rappelons le principe de la preuve. Quitte à conjuguer, on suppose $\{a, b, c\} = \{0, 1, \infty\}$. Le revêtement universel de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ est le disque $\mathbb{D}$, et toute application holomorphe $\mathbb{D} \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ se relève en une application holomorphe $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, laquelle décroît la métrique de Poincaré par le théorème A.14. On en déduit une majoration uniforme de la dérivée sphérique, donc l'équicontinuité par le critère de Marty, et le théorème A.17 conclut. Une démonstration complète se trouve dans [11], §3, ou [2], chapitre 3.

Remarque 1.17. Le nombre 3 est optimal : la famille $\{z \mapsto z^n\}_{n \geq 1}$ évite 0 et ∞ sur $\mathbf{C}^*$ sans être normale en aucun point. Le contraste avec le théorème 1.15 est frappant : éviter un ouvert non vide et éviter trois points ont la même force.

Nous aurons besoin d'un dernier énoncé élémentaire, qui exprime que le degré est une fonction continue.

Lemme 1.18. *Soit (f_n) une suite d'applications rationnelles convergeant uniformément sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ vers une application g . Alors g est rationnelle et $\deg f_n = \deg g$ pour n assez grand.*

Démonstration. L'application g est holomorphe comme limite uniforme d'applications holomorphes, donc rationnelle. Soit $b \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ une valeur non critique de g , et soient $a_1, \dots, a_k$ ses préimages, $k = \deg g$: choisissons des voisinages disjoints $V_i \ni a_i$ sur lesquels $g - b$ ne s'annule qu'en a_i et où g est injective. Par le théorème de Rouché appliqué dans une carte, $f_n - b$ possède exactement un zéro dans chaque V_i pour n grand, d'où $\deg f_n \geq k$. Par ailleurs g prend la valeur b exactement k fois ; si l'on avait $\deg f_n > k$ le long d'une sous-suite, une préimage supplémentaire a'_n resterait à distance positive de $\{a_1, \dots, a_k\}$ et, par compacité, convergerait vers une préimage de b par g hors de cet ensemble, ce qui est absurde. $\square$

1.4. Exercices.

Exercice 1.19. Vérifier que σ définie par (10) est bien une distance et qu'elle induit sur $\mathbf{C}$ la topologie usuelle. Montrer que $z \mapsto 1/z$ est une isométrie pour σ .

Exercice 1.20. Déterminer les points critiques et les valeurs critiques de $z \mapsto z^d$, de $z \mapsto z^2 + c$, et de $z \mapsto \frac{1}{2}(z + 1/z)$. Vérifier la formule de Riemann–Hurwitz sur ces exemples.

Exercice 1.21. Montrer que tout polynôme de degré 2 est conjugué par une application affine à un unique polynôme de la forme $z \mapsto z^2 + c$. Montrer que tout polynôme de degré 3 unitaire et centré est conjugué à un polynôme $z^3 + az + b$, et que (a, b) et $(a, -b)$ donnent des polynômes conjugués.

Exercice 1.22. On appelle *dérivée sphérique* de f la quantité $f^\#(z) = \frac{|f'(z)|(1+|z|^2)}{1+|f(z)|^2}$. Montrer que $f^\# = (1/f)^\#$ et que $\mathcal{F}$ est normale sur U si et seulement si $\{f^\# \mid f \in \mathcal{F}\}$ est uniformément bornée sur tout compact de U (critère de Marty).

Exercice 1.23. Montrer que la famille $\{z \mapsto z^n\}_{n \geq 1}$ est normale sur $\mathbb{D}$ et sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \overline{\mathbb{D}}$, mais en aucun point de $\mathbb{T}$.

2. LES ENSEMBLES DE FATOU ET DE JULIA

Dans tout ce chapitre, f désigne une application rationnelle de degré $d \geq 2$. Nous partageons la sphère en deux parties : l'ouvert où la dynamique est stable, et son complémentaire. Toute la difficulté, et tout l'intérêt, vient de ce que cette définition est purement qualitative : elle ne dit rien de la taille ni de la forme des deux ensembles obtenus. Nous verrons pourtant qu'on peut en tirer, à l'aide du seul théorème de Montel, une description remarquablement précise : l'ensemble de Julia est un compact non vide, parfait, totalement invariant, minimal parmi les fermés totalement invariants infinis, sur lequel la dynamique est transitive et les points périodiques répulsifs denses.

On rappelle qu'une application holomorphe est ouverte : l'image directe d'un ouvert est ouvert (voir l'annexe).

2.1. Définitions et invariance.

Définition 2.1. L'ensemble de Fatou $\mathcal{F}(f)$ est l'ensemble des points de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ au voisinage desquels la famille $(f^n)_{n \geq 0}$ est normale. L'ensemble de Julia est son complémentaire $\mathcal{J}(f) = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \mathcal{F}(f)$.

Par construction $\mathcal{F}(f)$ est ouvert et $\mathcal{J}(f)$ est compact. Une composante connexe de $\mathcal{F}(f)$ est appelée *composante de Fatou*.

Proposition 2.2. Soit f rationnelle de degré $d \geq 2$.

- (1) $\mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{J}(f)$ sont totalement invariants : $f^{-1}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(f) = f(\mathcal{F}(f))$, et de même pour $\mathcal{J}(f)$.
- (2) Pour tout $p \geq 1$, $\mathcal{F}(f^p) = \mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{J}(f^p) = \mathcal{J}(f)$.
- (3) Si ϕ est une homographie, $\mathcal{J}(\phi f \phi^{-1}) = \phi(\mathcal{J}(f))$.

Démonstration. (1) Soit $a \in \mathcal{F}(f)$ et V un voisinage de a sur lequel (f^n) est normale. Si b vérifie $f(b) = a$, alors (f^n) est normale sur $f^{-1}(V) \ni b$ puisque f^n y coïncide avec $f^{n-1} \circ f$ et que la composition à droite par une application fixée préserve la convergence uniforme sur les compacts. Ainsi $f^{-1}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$. Réciproquement, montrons que $f(V) \subset \mathcal{F}$, ce qui donnera $f(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$ et, joint à la surjectivité de f , l'égalité $f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ puis $f^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. L'ensemble $f(V)$ est un voisinage ouvert de $f(a)$. Soit (f^{n_k}) une suite ; par normalité sur V , quitte à extraire, $f^{n_k+1} = f^{n_k} \circ f$ converge uniformément sur les compacts de V vers une application $\tilde{g}$. Comme $f^{n_k+1}(z)$ ne dépend que de $f(z)$, la limite $\tilde{g}$ ne dépend que de $f(z)$ et définit donc g sur $f(V)$ par $g(f(z)) = \tilde{g}(z)$. Enfin tout compact $K \subset f(V)$ s'écrit $K \subset f(K')$ pour un compact $K' \subset V$, d'où $\sup_K \sigma(f^{n_k}, g) \leq \sup_{K'} \sigma(f^{n_k+1}, \tilde{g}) \rightarrow 0$.

(2) L'inclusion $\mathcal{F}(f) \subset \mathcal{F}(f^p)$ est claire, une sous-suite d'une famille normale étant normale. Inversement, si $(f^{pn})_n$ est normale sur V . Prenons une suite (f^{n_k}) . Il existe $j \in \{0, \dots, p-1\}$ telle

que une infinité de n_k soit congru à j modulo p . On remplace n_k par cette sous-suite et on écrit la division euclidienne de n_k par p : $n_k = m_k p + j$. On a

$$f^{m_k p + j} = f^j \circ f^{m_k p}. \quad (26)$$

Maintenant par normalité quitte à remplacer par une sous-suite on a que $f^{m_k p}$ converge uniformément sur tout compact K de V vers une fonction g . On a alors que $f^{m_k p + j}$ converge uniformément vers $f^j \circ g$ car $f^j : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est continue et donc uniformément continue car $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est compact.

(3) Immédiat puisque $(\phi f \phi^{-1})^n = \phi f^n \phi^{-1}$ et que ϕ est un homéomorphisme de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. $\square$

Proposition 2.3. Si $d \geq 2$, alors $\mathcal{J}(f) \neq \emptyset$.

Démonstration. Si $\mathcal{J}(f) = \emptyset$, la famille (f^n) est normale sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ tout entier, donc, $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ étant compact, une sous-suite (f^{n_k}) converge uniformément sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ vers une application rationnelle g . Le lemme 1.18 donne alors $\deg f^{n_k} = \deg g$ pour k grand. Or $\deg f^{n_k} = d^{n_k} \rightarrow \infty$: contradiction. $\square$

2.2. Points périodiques.

Définition 2.4. Soit a un point périodique de f de période exacte p , c'est-à-dire $f^p(a) = a$ et p est minimal. Le *multiplicateur* du cycle est $\lambda = (f^p)'(a)$, calculé dans une carte quelconque en a . Le cycle est dit *attractif* si $|\lambda| < 1$, *superattractif* si $\lambda = 0$, *répulsif* si $|\lambda| > 1$, *indifférent* si $|\lambda| = 1$.

Le multiplicateur ne dépend ni de la carte choisie ni du point du cycle : la règle de dérivation composée montre que $(f^p)'$ prend la même valeur en chaque point du cycle, et un changement de carte le multiplie par un facteur et son inverse.

Proposition 2.5. Un cycle attractif (en particulier superattractif) est contenu dans $\mathcal{F}(f)$; un cycle répulsif est contenu dans $\mathcal{J}(f)$.

Démonstration. Quitte à remplacer f par f^p , ce qui ne change pas les ensembles de Fatou et de Julia, on suppose $p = 1$ et, quitte à conjuguer, $a = 0 \in \mathbf{C}$. Si $|\lambda| < 1$, choisissons $|\lambda| < c < 1$; il existe $r > 0$ tel que $|f(z)| \leq c|z|$ pour $|z| \leq r$, d'où $|f^n(z)| \leq c^n r$ sur $\mathbb{D}(0, r)$: la suite (f^n) converge uniformément vers 0 sur ce disque, donc $0 \in \mathcal{F}(f)$. Si $|\lambda| > 1$ et si (f^{n_k}) convergeait uniformément au voisinage de 0 vers g , alors par la formule de Cauchy $(f^{n_k})'(0) \rightarrow g'(0) \in \mathbf{C}$; or $|(f^{n_k})'(0)| = |\lambda|^{n_k} \rightarrow \infty$. $\square$

L'ouvert

$$\mathcal{B}(a) = \left\{ z \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \mid f^{pn}(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \right\} \quad (27)$$

est appelé *bassin d'attraction* du point attractif a ; c'est un ouvert contenu dans $\mathcal{F}(f)$ et sa frontière est contenue dans $\mathcal{J}(f)$ (exercice 2.19).

Les deux théorèmes qui suivent décrivent la dynamique locale au voisinage d'un point fixe et seront utilisés au chapitre 4.

Théorème 2.6 (Linéarisation de Kœnigs). *Soit f holomorphe au voisinage de 0 avec $f(0) = 0$ et $\lambda = f'(0)$ vérifiant $0 < |\lambda| < 1$. Alors il existe un voisinage V de 0 et une application holomorphe injective $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$ avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 1$ telle que*

$$\varphi \circ f = \lambda \varphi \quad \text{sur } V. \quad (28)$$

De plus φ est unique sous ces conditions. Le même énoncé vaut pour $|\lambda| > 1$ en appliquant ce qui précède à la branche locale de f^{-1} fixant 0.

Démonstration. Choisissons c avec $|\lambda| < c < 1$ et $c^2 < |\lambda|$, ce qui est possible dès que $|\lambda| < c < \sqrt{|\lambda|}$. Il existe $r > 0$ et $M > 0$ tels que, sur $\overline{\mathbb{D}}(0, r)$,

$$|f(z)| \leq c|z| \quad \text{et} \quad |f(z) - \lambda z| \leq M|z|^2. \quad (29)$$

Posons $\varphi_n = \lambda^{-n} f^n$. La première estimée donne $|f^n(z)| \leq c^n |z|$, et la seconde

$$|\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| = |\lambda|^{-n-1} |f(f^n(z)) - \lambda f^n(z)| \leq \frac{Mr^2}{|\lambda|} \left(\frac{c^2}{|\lambda|} \right)^n. \quad (30)$$

Comme $c^2 < |\lambda|$, la série télescopique converge uniformément sur $\overline{\mathbb{D}}(0, r)$ et $\varphi = \lim \varphi_n$ est holomorphe, avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = \lim \lambda^{-n} (f^n)'(0) = 1$. L'identité $\varphi_n \circ f = \lambda \varphi_{n+1}$ passe à la limite et donne (28). Enfin φ est injective au voisinage de 0 car $\varphi'(0) \neq 0$. Pour l'unicité, si ψ est une autre solution, $h = \psi \circ \varphi^{-1}$ commute à $z \mapsto \lambda z$ et vérifie $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$; en comparant les développements en série on trouve $h = \text{id}$. $\square$

Théorème 2.7 (Böttcher). *Soit $f(z) = a_k z^k + O(z^{k+1})$ holomorphe au voisinage de 0, avec $k \geq 2$ et $a_k \neq 0$. Alors il existe un voisinage V de 0 et $\varphi : V \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe injective avec $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) \neq 0$, telle que*

$$\varphi \circ f = \varphi^k \quad \text{sur } V. \quad (31)$$

L'application φ est unique à multiplication près par une racine $(k-1)$ -ième de l'unité.

Démonstration (esquisse). Quitte à conjuguer par une homothétie on suppose $a_k = 1$, de sorte que $f(z) = z^k(1 + u(z))$ avec $u(0) = 0$. Sur un disque $\overline{\mathbb{D}}(0, r)$ assez petit on a $|f(z)| \leq |z|^k \cdot 2 \leq |z|/2$ et l'on peut définir la branche principale $(1 + u)^{1/k^n}$. On pose alors $\varphi_n(z) = (f^n(z))^{1/k^n}$, où la racine est choisie de sorte que $\varphi_n(z)/z \rightarrow 1$ en 0; explicitement

$$\varphi_n(z) = z \prod_{j=0}^{n-1} (1 + u(f^j(z)))^{1/k^{j+1}}. \quad (32)$$

Comme $|f^j(z)| \leq 2^{-j} |z|$, on a $|u(f^j(z))| \leq C2^{-j}$ et le produit infini converge uniformément sur $\overline{\mathbb{D}}(0, r)$ vers une fonction φ ne s'annulant qu'en 0, avec $\varphi'(0) = 1$. L'identité $\varphi_n(f(z)) = \varphi_{n+1}(z)^k$ passe à la limite et donne (31). L'unicité se démontre comme au théorème 2.6. $\square$

Le cas indifférent, $|\lambda| = 1$, est beaucoup plus délicat : le point fixe peut être linéarisable (*point de Siegel*, il est alors dans $\mathcal{F}$) ou non (il est alors dans $\mathcal{J}$), et le cas parabolique $\lambda^q = 1$ relève de la théorie de Leau–Fatou. Nous n’en aurons pas besoin ; voir [11], §8–11.

2.3. Propriétés de l’ensemble de Julia. Tout ce qui suit repose sur le lemme d’expansion suivant, conséquence directe du grand théorème de Montel.

Lemme 2.8 (Propriété d’explosion). *Soit $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ et U un voisinage ouvert de z_0 . Alors, pour tout $m \geq 0$, l’ensemble*

$$\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \bigcup_{n \geq m} f^n(U) \quad (33)$$

contient au plus deux points.

Démonstration. Si cet ensemble contenait trois points distincts a, b, c , la famille $(f^n)_{n \geq m}$ serait une famille d’applications holomorphes de U dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{a, b, c\}$, donc normale par le théorème 1.16 ; comme $(f^n)_{n < m}$ est une famille finie, $(f^n)_{n \geq 0}$ serait normale sur U , contredisant $z_0 \in \mathcal{J}(f)$. $\square$

Définition 2.9. Un point $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est dit *exceptionnel* si son orbite inverse $\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(a)$ est finie. On note E_f l’ensemble des points exceptionnels.

Proposition 2.10. *L’ensemble E_f contient au plus deux points, et $E_f \subset \mathcal{F}(f)$. Si $\#E_f = 1$, f est conjuguée à un polynôme ; si $\#E_f = 2$, f est conjuguée à $z \mapsto z^{\pm d}$.*

Démonstration. Soit $a \in E_f$ et $A = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(a)$, fini par hypothèse. On a $f^{-1}(A) \subset A$, et comme f est surjective $f(f^{-1}(A)) = A$, d’où $\#f^{-1}(A) \geq \#A$ et finalement $f^{-1}(A) = A$. Ainsi f induit une bijection de A et chaque $x \in A$ a une unique préimage $y \in A$; la proposition 1.11 donne $\deg_y f = d$, donc y contribue $d - 1$ à la somme de Riemann–Hurwitz (22). Il vient $\#A(d - 1) \leq 2d - 2$, soit $\#A \leq 2$. Comme A est réunion d’orbites arrières de points exceptionnels, ceci montre $\#E_f \leq 2$. Chaque point de A est alors périodique de période 1 ou 2 avec $\deg_y f = d \geq 2$: c’est un point superattractif, donc dans $\mathcal{F}(f)$ par la proposition 2.5. Les deux derniers énoncés résultent de la proposition 1.13 et, pour $\#E_f = 2$, du fait qu’après conjugaison envoyant les deux points sur 0 et ∞ , f est une application rationnelle dont 0 et ∞ sont les seules préimages d’eux-mêmes, donc $f(z) = cz^{\pm d}$, et l’on ramène c à 1 par une homothétie. $\square$

Théorème 2.11. *Soit $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus E_f$. Alors*

$$\mathcal{J}(f) \subset \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(a)}, \quad (34)$$

avec égalité si $a \in \mathcal{J}(f)$.

Démonstration. Soient $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ et U un voisinage de z_0 . L’orbite arrière $O^-(a) = \bigcup_n f^{-n}(a)$ est infinie, donc contient au moins trois points ; par le lemme 2.8, l’un d’eux, disons $b \in f^{-m}(a)$, appartient à $f^N(U)$ pour un certain N . Il existe donc $w \in U$ avec $f^{N+m}(w) = a$, c’est-à-dire $U \cap O^-(a) \neq \emptyset$.

Ceci vaut pour tout voisinage U , d'où (34). Si de plus $a \in \mathcal{J}(f)$, l'invariance totale donne $O^-(a) \subset \mathcal{J}(f)$, et l'ensemble de Julia étant fermé on a l'inclusion réciproque. $\square$

Théorème 2.12. *Soit f rationnelle de degré $d \geq 2$.*

- (1) $\mathcal{J}(f)$ est infini, et même parfait (fermé sans point isolé); en particulier il est non dénombrable.
- (2) $\mathcal{J}(f)$ est le plus petit fermé totalement invariant de cardinal ≥ 3 .
- (3) Ou bien $\mathcal{J}(f) = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, ou bien $\mathcal{J}(f)$ est d'intérieur vide.
- (4) La dynamique est topologiquement transitive sur $\mathcal{J}(f)$: pour tous ouverts U, V rencontrant $\mathcal{J}(f)$, il existe n tel que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Démonstration. (1) Si $\mathcal{J}(f)$ était fini, il serait totalement invariant, donc formé de points exceptionnels, donc contenu dans $\mathcal{F}(f)$ par la proposition 2.10 : absurde puisqu'il est non vide. Il est donc infini. Montrons qu'aucun point $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ n'est isolé. Soit U un voisinage de z_0 . Choisissons $a \in \mathcal{J}(f)$ n'appartenant pas à l'orbite positive $\{f^n(z_0)\}_{n \geq 0}$ si celle-ci est finie, et $a \in \mathcal{J}(f) \setminus \{z_0\}$ quelconque sinon; c'est possible car $\mathcal{J}(f)$ est infini. Par le théorème 2.11 et le lemme 2.8 appliqué avec m arbitrairement grand, U rencontre $f^{-n}(a) \subset \mathcal{J}(f)$ pour une infinité de n . Un tel point d'intersection w vérifie $f^n(w) = a$; s'il valait z_0 pour tous ces n , on aurait $f^n(z_0) = a$ pour une infinité de n , ce qui est exclu par le choix de a . Donc U contient un point de $\mathcal{J}(f)$ distinct de z_0 .

(2) Soit E un fermé totalement invariant avec $\#E \geq 3$. Comme $\#E_f \leq 2$, il existe $a \in E \setminus E_f$, et alors $O^-(a) \subset E$; le théorème 2.11 donne $\mathcal{J}(f) \subset \overline{O^-(a)} \subset E$.

(3) Si $U \subset \mathcal{J}(f)$ est un ouvert non vide, le lemme 2.8 montre que $\bigcup_n f^n(U)$, qui est contenu dans $\mathcal{J}(f)$ par invariance, omet au plus deux points; comme $\mathcal{J}(f)$ est fermé et parfait, $\mathcal{J}(f) = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$.

(4) Soient U, V rencontrant $\mathcal{J}(f)$, et $z_0 \in U \cap \mathcal{J}(f)$. Par le lemme 2.8, $\bigcup_n f^n(U)$ omet au plus deux points, tous exceptionnels donc dans $\mathcal{F}(f)$; il contient donc $\mathcal{J}(f)$, et en particulier rencontre V . $\square$

Théorème 2.13 (Fatou, Julia). *L'ensemble de Julia est l'adhérence de l'ensemble des points périodiques répulsifs de f .*

Démonstration. Un point périodique répulsif est dans $\mathcal{J}(f)$ par la proposition 2.5, et $\mathcal{J}(f)$ est fermé : une inclusion est acquise. Montrons que les points périodiques sont denses dans $\mathcal{J}(f)$. Soient $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ et U un voisinage; quitte à rétrécir et à remplacer z_0 par un point voisin de $\mathcal{J}(f)$ — possible car $\mathcal{J}(f)$ est parfait — on peut supposer que z_0 n'est ni critique, ni valeur critique, ni périodique. Choisissons $b \in f^{-1}(z_0)$ avec $b \neq z_0$, puis un voisinage connexe $V \subset U$ de z_0 et la branche $g : V \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ de f^{-1} avec $g(z_0) = b$; quitte à rétrécir V , on a $\overline{g(V)} \cap \overline{V} = \emptyset$. Supposons par l'absurde que, pour tout $n \geq 1$ et tout $z \in V$, on ait $f^n(z) \neq z$ et $f^n(z) \neq g(z)$. Alors les fonctions

$$h_n = \frac{f^n - \text{id}}{f^n - g} \quad (35)$$

sont holomorphes sur V et évitent 0, ∞ et 1 — cette dernière valeur car $h_n(z) = 1$ équivaudrait à $z = g(z)$, exclu par $\overline{g(V)} \cap \overline{V} = \emptyset$. Le théorème 1.16 montre que (h_n) est normale; soit h la limite

d'une sous-suite. Si $h \equiv 1$, alors $\frac{g-\text{id}}{f^{n_k}-g} = h_{n_k} - 1 \rightarrow 0$ uniformément sur les compacts, et comme $g - \text{id}$ ne s'annule pas, $f^{n_k} \rightarrow \infty$ uniformément sur les compacts de V . Sinon, $h \neq 1$ et, en résolvant (35),

$$f^{n_k} = \frac{\text{id} - g h_{n_k}}{1 - h_{n_k}} \quad (36)$$

converge uniformément sur les compacts de l'ouvert $V \setminus h^{-1}(1)$, lequel est V privé d'un ensemble discret ; on conclut par le principe du maximum appliqué à la distance sphérique que la convergence a lieu sur V tout entier. Dans les deux cas (f^n) est normale sur V , ce qui contredit $z_0 \in \mathcal{J}(f)$. Il existe donc $n \geq 1$ et $z \in V$ avec $f^n(z) = z$, ou bien $f^n(z) = g(z)$, auquel cas $f^{n+1}(z) = f(g(z)) = z$: dans les deux cas U contient un point périodique.

Enfin, un théorème de Fatou que nous admettons ([11], §12, ou [2], §9.6) affirme que f possède au plus $2d - 2$ cycles non répulsifs. Les points périodiques non répulsifs étant en nombre fini et $\mathcal{J}(f)$ étant parfait, les points périodiques répulsifs sont encore denses dans $\mathcal{J}(f)$. $\square$

2.4. Le cas polynomial. À partir de maintenant, et sauf mention explicite du contraire, f désigne un *polynôme* de degré $d \geq 2$. Le point ∞ est alors un point fixe superattractif totalement invariant, et son bassin

$$\mathcal{B}(\infty) = \{z \in \mathbf{C} \mid f^n(z) \rightarrow \infty\} \quad (37)$$

est un ouvert connexe de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ contenant ∞ .

Définition 2.14. L'ensemble de Julia rempli de f est

$$K_f = \{z \in \mathbf{C} \mid (f^n(z))_{n \geq 0} \text{ est bornée}\} = \mathbf{C} \setminus \mathcal{B}(\infty). \quad (38)$$

Proposition 2.15. L'ensemble K_f est un compact non vide, totalement invariant, et

$$\mathcal{J}(f) = \partial K_f = \partial \mathcal{B}(\infty). \quad (39)$$

De plus $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus K_f = \mathcal{B}(\infty)$ est connexe : K_f est plein.

Démonstration. Choisissons $R \geq 1$ tel que $|f(z)| \geq 2|z|$ pour $|z| \geq R$; alors $|f^n(z)| \geq 2^n|z| \rightarrow \infty$, donc $K_f \subset \overline{\mathbb{D}}(0, R)$ et K_f est fermé comme intersection des fermés $f^{-n}(\overline{\mathbb{D}}(0, R))$. Il est non vide car f a un point fixe dans $\mathbf{C}$. L'invariance totale est immédiate. Sur $\text{Int } K_f$ la suite (f^n) est uniformément bornée donc normale (théorème 1.15), et sur $\mathcal{B}(\infty)$ elle converge uniformément sur les compacts vers ∞ : ces deux ouverts sont dans $\mathcal{F}(f)$. Si $z_0 \in \partial K_f$, tout voisinage de z_0 contient des points d'orbite bornée et des points d'orbite tendant vers ∞ , de sorte qu'aucune sous-suite de (f^n) ne peut converger uniformément au voisinage de z_0 : donc $\partial K_f \subset \mathcal{J}(f)$, et (39) suit. Enfin la connexité de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus K_f$ sera obtenue au chapitre 4 comme conséquence du principe du maximum appliqué à la fonction de Green (proposition 4.3). $\square$

Exemple 2.16. Pour $f(z) = z^d$ on a $K_f = \overline{\mathbb{D}}$ et $\mathcal{J}(f) = \mathbb{T}$: en effet $|f^n(z)| = |z|^{dn}$ tend vers 0, vers ∞ ou reste égal à 1 selon que $|z| < 1$, $|z| > 1$ ou $|z| = 1$. La dynamique sur $\mathcal{J}(f)$ est celle de $\theta \mapsto d\theta$ sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$: c'est le prototype d'une dynamique chaotique. Ici $E_f = \{0, \infty\}$.

Exemple 2.17. Soit $f(z) = z^2 - 2$ et $\pi(w) = w + 1/w$. On vérifie $\pi(w^2) = f(\pi(w))$, de sorte que π semi-conjugué $w \mapsto w^2$ à f . Comme $\pi(\mathbb{T}) = [-2, 2]$ et que π envoie $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \overline{\mathbb{D}}$ biholomorphiquement sur $\mathbf{P}^1(\mathbb{C}) \setminus [-2, 2]$, on en déduit $K_f = \mathcal{J}(f) = [-2, 2]$. C'est un exemple où K_f est d'intérieur vide.

Exemple 2.18. Soit $f(z) = z^2 + c$ avec $|c|$ grand. Si $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$, le point critique 0 vérifie $f^n(0) \rightarrow \infty$ et l'on montre que $\mathcal{J}(f) = K_f$ est un ensemble de Cantor sur lequel f est conjuguée au décalage sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (exercice 2.21). Nous verrons au chapitre 4 que la dichotomie « K_f connexe » contre « K_f de Cantor » est gouvernée par le comportement des points critiques.

2.5. Exercices.

Exercice 2.19. Soit a un point périodique attractif de f . Montrer que $\partial\mathcal{B}(a) = \mathcal{J}(f)$ si f n'a pas d'autre cycle attractif, et en général que $\partial\mathcal{B}(a) \subset \mathcal{J}(f)$.

Exercice 2.20. Montrer que $\mathcal{J}(f^{-1})$ n'a pas de sens, mais que si ϕ est une homographie commutant à f alors $\phi(\mathcal{J}(f)) = \mathcal{J}(f)$. En déduire que $\mathcal{J}(z^d)$ est invariant par toutes les rotations.

Exercice 2.21. Soit $f(z) = z^2 + c$ avec $|c| > 4$. Montrer que $D = \overline{\mathbb{D}}(0, 2|c|^{1/2})$ vérifie $f^{-1}(D) \subset D$ et que $f^{-1}(D)$ a deux composantes connexes D_0, D_1 sur chacune desquelles f est injective. En déduire que $K_f = \bigcap_n f^{-n}(D)$ est homéomorphe à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et que f y est conjuguée au décalage.

Exercice 2.22. Montrer que si f est un polynôme réel (à coefficients réels), K_f et $\mathcal{J}(f)$ sont symétriques par rapport à $\mathbf{R}$. Que dire de $f(z) = z^d$ et des symétries de $\mathcal{J}(f)$?

Exercice 2.23. Montrer que si $\mathcal{J}(f)$ est totalement discontinu alors $\mathcal{J}(f) = K_f$. Montrer réciproquement que si $\text{Int} K_f \neq \emptyset$ alors $\mathcal{J}(f)$ n'est pas totalement discontinu.

Exercice 2.24. Déduire du théorème 2.12 qu'il existe un point de $\mathcal{J}(f)$ dont l'orbite est dense dans $\mathcal{J}(f)$. (On pourra utiliser le théorème de Baire.)

3. ÉLÉMENTS DE THÉORIE DU POTENTIEL

Ce chapitre est un cours de théorie du potentiel dans le plan, rédigé de façon autonome. Le fil conducteur est le suivant : à toute fonction sous-harmonique u est associée une mesure positive $\Delta_u = \frac{1}{2\pi}\Delta u$, sa *mesure de Riesz*, et réciproquement toute mesure positive est, localement, la mesure de Riesz d'un *potentiel logarithmique*. Ce dictionnaire entre fonctions et mesures a deux vertus. D'une part il transforme des questions de convergence de mesures, difficiles à manipuler, en questions de convergence de fonctions, où l'on dispose du principe du maximum : c'est le mécanisme de toutes les démonstrations du chapitre 5. D'autre part il permet d'associer à tout compact une mesure canonique, sa *mesure d'équilibre*, qui pour un ensemble de Julia rempli se révélera être exactement la mesure d'entropie maximale.

Nous démontrons tout ce dont nous aurons besoin, à trois exceptions près, clairement signalées : la compacité L^1_{loc} des familles de fonctions sous-harmoniques (théorème 3.14, point (1)), le principe

du maximum étendu (théorème 3.20), et la valeur de la capacité d'un segment. Nous utiliserons librement deux faits de la théorie des fonctions harmoniques : la résolution du problème de Dirichlet dans un disque par l'intégrale de Poisson, et l'inégalité de Harnack. Les compléments se trouvent dans [12], chapitres 2 et 3, ou dans [14].

3.1. Fonctions harmoniques et sous-harmoniques. On identifie $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}^2$ et l'on note $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 = 4\partial\bar{\partial}$ le laplacien. Une fonction h de classe C^2 sur un ouvert U est *harmonique* si $\Delta h = 0$; c'est équivalent à la propriété de la moyenne, et localement à être la partie réelle d'une fonction holomorphe. Rappelons que si φ est continue sur $\partial\mathbb{D}(a, r)$, l'intégrale de Poisson

$$\mathcal{P}\varphi(a + \rho e^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(\theta - \alpha) + \rho^2} \varphi(a + re^{i\theta}) d\theta \quad (40)$$

définit l'unique fonction harmonique sur $\mathbb{D}(a, r)$, continue sur le disque fermé, de valeurs au bord φ .

Définition 3.1. Soit $U \subset \mathbf{C}$ un ouvert. Une fonction $u : U \rightarrow [-\infty, +\infty[$ est *sous-harmonique* si

- (i) u est semi-continue supérieurement ;
- (ii) u n'est identiquement $-\infty$ sur aucune composante connexe de U ;
- (iii) pour tout disque $\overline{\mathbb{D}}(a, r) \subset U$, on a l'inégalité de la moyenne

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta. \quad (41)$$

On note $M(u, a, r)$ le membre de droite de (41).

La semi-continuité supérieure garantit que u est majorée sur tout compact et que l'intégrale dans (41) est bien définie dans $[-\infty, +\infty[$. Une fonction est harmonique si et seulement si elle et son opposée sont sous-harmoniques.

Théorème 3.2 (Principe du maximum). *Soit u sous-harmonique sur un domaine (ouvert connexe) U . Si u atteint son maximum en un point de U , alors u est constante. Par conséquent, si U est borné et si $\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0$ pour tout $\zeta \in \partial U$, alors $u \leq 0$ sur U .*

Démonstration. Soit $M = \sup_U u$ et $A = \{u = M\}$, supposé non vide. L'ensemble A est fermé dans U par semi-continuité supérieure : $\{u \geq M\}$ est fermé. Montrons qu'il est ouvert. Soient $a \in A$ et $\overline{\mathbb{D}}(a, r) \subset U$. Pour tout $s \leq r$, (41) donne $M = u(a) \leq M(u, a, s) \leq M$, donc $M(u, a, s) = M$; comme $u \leq M$, la fonction $M - u \geq 0$ est d'intégrale nulle sur chaque cercle, donc nulle presque partout sur $\mathbb{D}(a, r)$ pour la mesure de Lebesgue. Si l'on avait $u(b) < M$ pour un $b \in \mathbb{D}(a, r)$, la semi-continuité supérieure fournirait un voisinage de b sur lequel $u < M$, de mesure de Lebesgue strictement positive : contradiction. Donc $\mathbb{D}(a, r) \subset A$, et A est ouvert. Par connexité $A = U$.

Pour la seconde assertion, prolongeons u par $\limsup$ au bord et notons M son supremum sur $\overline{U}$, atteint en un point ζ de ce compact par semi-continuité supérieure. Si $\zeta \in \partial U$ alors $M \leq 0$; sinon u est constante égale à M sur la composante de U contenant ζ , et l'hypothèse au bord de cette composante donne encore $M \leq 0$. $\square$

Proposition 3.3. *Soit u sous-harmonique sur U et $\overline{\mathbb{D}}(a, r) \subset U$. Alors $s \mapsto M(u, a, s)$ est croissante sur $]0, r]$ et $M(u, a, s) \rightarrow u(a)$ lorsque $s \rightarrow 0$.*

Démonstration. Soit $0 < s < t \leq r$. La fonction u étant semi-continue supérieurement sur le compact $\partial\mathbb{D}(a, t)$, il existe une suite de fonctions continues φ_k décroissant vers u sur ce cercle. Soit $h_k = \mathcal{P}\varphi_k$ l'intégrale de Poisson (40) correspondante. La fonction $u - h_k$ est sous-harmonique sur $\mathbb{D}(a, t)$ et vérifie $\limsup_{z \rightarrow \zeta} (u - h_k)(z) \leq u(\zeta) - \varphi_k(\zeta) \leq 0$ pour $\zeta \in \partial\mathbb{D}(a, t)$, donc $u \leq h_k$ sur $\mathbb{D}(a, t)$ par le théorème 3.2. Il vient

$$M(u, a, s) \leq M(h_k, a, s) = h_k(a) = M(\varphi_k, a, t), \quad (42)$$

la première égalité venant de la propriété de la moyenne pour h_k harmonique. Le théorème de convergence monotone donne $M(\varphi_k, a, t) \rightarrow M(u, a, t)$, d'où $M(u, a, s) \leq M(u, a, t)$. Enfin $\limsup_{s \rightarrow 0} M(u, a, s) \leq u(a)$ par semi-continuité supérieure et lemme de Fatou inversé, tandis que $M(u, a, s) \geq u(a)$ par (41). $\square$

Corollaire 3.4. *Sous les mêmes hypothèses,*

$$u(a) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}(a, r)} u d\text{Leb} \leq \sup_{\mathbb{D}(a, r)} u. \quad (43)$$

Démonstration. Intégrer (41) contre $2s ds$ sur $[0, r]$ et utiliser les coordonnées polaires. $\square$

Proposition 3.5. (1) *Si u, v sont sous-harmoniques et $s, t \geq 0$, alors $su + tv$ et $\max(u, v)$ le sont.*

(2) *Une limite décroissante de fonctions sous-harmoniques est sous-harmonique (si elle n'est pas $\equiv -\infty$), de même qu'une limite uniforme sur les compacts.*

(3) *Si h est holomorphe et non identiquement nulle sur U , alors $\log |h|$ est sous-harmonique sur U .*

(4) *Si u est sous-harmonique et h holomorphe, $u \circ h$ est sous-harmonique (ou $\equiv -\infty$).*

(5) *Toute fonction sous-harmonique est localement intégrable ; en particulier $\{u = -\infty\}$ est de mesure de Lebesgue nulle.*

Démonstration. (1) La semi-continuité supérieure et (41) passent aux combinaisons positives. Pour $w = \max(u, v)$: w est semi-continue supérieurement, et $w(a) = u(a) \leq M(u, a, r) \leq M(w, a, r)$ si le maximum est atteint par u , de même sinon.

(2) Si $u_k \downarrow u$, la semi-continuité supérieure de u vient de ce que $\{u < c\} = \bigcup_k \{u_k < c\}$ est ouvert, et (41) passe à la limite par convergence monotone. Pour une limite uniforme sur les compacts, tout passe à la limite directement.

(3) La fonction $\log |h|$ est continue à valeurs dans $[-\infty, \infty[$, donc semi-continue supérieurement. Si $h(a) \neq 0$, alors h ne s'annule pas près de a , on peut y écrire $\log |h| = \Re \log h$ qui est harmonique, et (41) est une égalité pour r petit ; pour r quelconque tel que $\overline{\mathbb{D}}(a, r) \subset U$, on applique la proposition 3.3, dont la démonstration n'utilise que l'inégalité de la moyenne pour les petits rayons. Si $h(a) = 0$, alors $\log |h(a)| = -\infty$ et (41) est triviale.

(4) La semi-continuité supérieure est claire. Si h est constante, $u \circ h$ l'est aussi ; sinon h est ouverte, et pour $\mathbb{D}(a, r) \subset U$ on peut supposer r assez petit pour que h soit, ou bien injective sur $\mathbb{D}(a, r)$, ou bien de la forme $h(a) + \varphi^k$ (proposition A.10). Dans le premier cas h est un biholomorphisme sur son image et le résultat provient de l'invariance conforme de l'harmonicité ; dans le second, l'image du cercle $\partial\mathbb{D}(a, s)$ par h est un cercle parcouru k fois, de sorte que $M(u \circ h, a, s) = M(u, h(a), |\varphi|^{-k}\text{-rayon})$, et l'on conclut par (41) appliquée à u .

(5) Soit $a \in U$ avec $u(a) > -\infty$ et $\mathbb{D}(a, 2r) \subset U$. Par (43), $\int_{\mathbb{D}(a, r)} u d\text{Leb} \geq \pi r^2 u(a) > -\infty$, et u est majorée sur ce disque : donc $u \in L^1(\mathbb{D}(a, r))$, et en particulier $u > -\infty$ presque partout sur $\mathbb{D}(a, r)$. L'ensemble des a au voisinage desquels u est intégrable est donc ouvert ; son complémentaire dans U est l'ensemble des a tels que $u \equiv -\infty$ au voisinage de a , qui est également ouvert. Par connexité et l'hypothèse (ii) de la définition 3.1, u est localement intégrable sur U tout entier. $\square$

Régularisation. Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbf{C})$ radiale, positive, d'intégrale 1, à support dans $\mathbb{D}(0, 1)$, et $\chi_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-2}\chi(z/\varepsilon)$. Pour u sous-harmonique sur U , on pose $u_\varepsilon = u * \chi_\varepsilon$, définie sur $U_\varepsilon = \{z \in U \mid \text{dist}(z, \partial U) > \varepsilon\}$.

Proposition 3.6. *La fonction u_ε est de classe C^∞ et sous-harmonique sur U_ε , on a $u_\varepsilon \geq u$, et u_ε décroît vers u lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.*

Démonstration. La régularité et la sous-harmonicité (par Fubini dans (41)) sont standard. Comme χ est radiale, en écrivant $\chi(z) = \psi(|z|)$ et en passant en polaires,

$$u_\varepsilon(a) = \int u(a-w)\chi_\varepsilon(w) d\text{Leb}(w) = 2\pi \int_0^\varepsilon M(u, a, s) \psi_\varepsilon(s) s ds, \quad (44)$$

où $\psi_\varepsilon(s) = \varepsilon^{-2}\psi(s/\varepsilon)$ et $2\pi \int_0^\varepsilon \psi_\varepsilon(s) s ds = 1$. Ainsi $u_\varepsilon(a)$ est une moyenne pondérée des $M(u, a, s)$ pour $s \leq \varepsilon$. La proposition 3.3 donne alors $u_\varepsilon(a) \geq u(a)$, la décroissance en ε , et la convergence $u_\varepsilon(a) \rightarrow u(a)$. $\square$

La mesure de Riesz.

Lemme 3.7. *Au sens des distributions sur $\mathbf{C}$, $\Delta \log |z| = 2\pi\delta_0$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{C})$. La fonction $\log |z|$ étant localement intégrable et harmonique hors de 0, la formule de Green sur $\{\varepsilon < |z| < R\}$, avec R assez grand, donne

$$\int_{|z|>\varepsilon} \log |z| \Delta \varphi d\text{Leb} = \int_{|z|=\varepsilon} (\varphi \partial_r \log |z| - \log |z| \partial_r \varphi) ds, \quad (45)$$

le bord extérieur ne contribuant pas. Le premier terme vaut $\frac{1}{\varepsilon} \int_{|z|=\varepsilon} \varphi ds = 2\pi M(\varphi, 0, \varepsilon) \rightarrow 2\pi\varphi(0)$; le second est majoré par $2\pi\varepsilon |\log \varepsilon| \|\nabla \varphi\|_\infty \rightarrow 0$. Enfin le membre de gauche tend vers $\int \log |z| \Delta \varphi$ par intégrabilité locale. $\square$

Théorème 3.8 (Mesure de Riesz). *Soit u sous-harmonique sur U . Alors Δu , pris au sens des distributions, est une mesure de Radon positive sur U . On pose*

$$\Delta u = \frac{1}{2\pi} \Delta u, \quad (46)$$

de sorte que $\Delta_{\log|z-a|} = \delta_a$. Réciproquement, si $v \in L^1_{\text{loc}}(U)$ vérifie $\Delta v \geq 0$ au sens des distributions, alors v coïncide presque partout avec une unique fonction sous-harmonique.

Démonstration. Soit $\varphi \in C_c^\infty(U)$ positive, à support dans U_ε pour ε petit. La fonction u_ε est C^∞ et sous-harmonique, donc $\Delta u_\varepsilon \geq 0$ au sens classique : en effet, pour une fonction C^2 , la proposition 3.3 et le développement $M(v, a, s) = v(a) + \frac{s^2}{4} \Delta v(a) + o(s^2)$ forcent $\Delta v(a) \geq 0$. Il vient

$$\int u_\varepsilon \Delta \varphi \, d\text{Leb} = \int \varphi \Delta u_\varepsilon \, d\text{Leb} \geq 0. \quad (47)$$

Comme $u_\varepsilon \downarrow u$ avec $u_\varepsilon \leq u_{\varepsilon_0}$ intégrable sur le support de φ , la convergence dominée donne $\int u \Delta \varphi \geq 0$. La forme linéaire $\varphi \mapsto \int u \Delta \varphi$ est donc positive sur $C_c^\infty(U)$, et s'étend par densité en une forme linéaire positive sur $C_c(U)$: le théorème A.20 en fait une mesure de Radon positive. La valeur $\Delta_{\log|z-a|} = \delta_a$ est le lemme 3.7.

Réciproquement, soit $v \in L^1_{\text{loc}}$ avec $\Delta v \geq 0$. Les régularisées v_ε sont C^∞ avec $\Delta v_\varepsilon = (\Delta v) * \chi_\varepsilon \geq 0$, donc sous-harmoniques ; par la proposition 3.6 appliquée à v_ε , la famille (v_ε) est décroissante en ε sur tout compact, et sa limite $\tilde{v}$ est sous-harmonique par la proposition 3.5(2). Comme $v_\varepsilon \rightarrow v$ dans L^1_{loc} , on a $\tilde{v} = v$ presque partout. L'unicité résulte de ce qu'une fonction sous-harmonique est déterminée par sa classe dans L^1_{loc} , puisque $u(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(a)$ et que u_ε ne dépend que de la classe de u . $\square$

La normalisation (46) est celle qui rend l'énoncé suivant élégant ; c'est la formule de Poincaré–Lelong en dimension 1.

Proposition 3.9. *Soit h holomorphe non identiquement nulle sur U . Alors*

$$\Delta_{\log|h|} = \sum_{a: h(a)=0} \text{ord}_a(h) \delta_a. \quad (48)$$

Démonstration. Les deux membres sont des mesures, il suffit donc de les comparer localement. Hors des zéros de h , $\log|h|$ est harmonique et les deux membres sont nuls. Au voisinage d'un zéro a d'ordre k , écrivons $h(z) = (z-a)^k g(z)$ avec g ne s'annulant pas ; alors $\log|h| = k \log|z-a| + \log|g|$, où $\log|g| = \Re \log g$ est harmonique. Le lemme 3.7 conclut. $\square$

Proposition 3.10 (Formule de Jensen). *Soit u sous-harmonique sur U et $\overline{\mathbb{D}}(a, r) \subset U$. Pour $0 < s < t \leq r$,*

$$M(u, a, t) - M(u, a, s) = \int_s^t \Delta_u(\overline{\mathbb{D}}(a, \rho)) \frac{d\rho}{\rho}. \quad (49)$$

Démonstration. Supposons d'abord u de classe C^2 . En dérivant sous l'intégrale puis en appliquant la formule de la divergence,

$$\frac{d}{d\rho} M(u, a, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_\rho u \, d\theta = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial\mathbb{D}(a, \rho)} \partial_n u \, ds = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\mathbb{D}(a, \rho)} \Delta u \, d\text{Leb} = \frac{\Delta u(\mathbb{D}(a, \rho))}{\rho}, \quad (50)$$

et l'on intègre de s à t . Dans le cas général, on applique ce qui précède à u_ε , dont la mesure de Riesz est $\Delta u * \chi_\varepsilon$, puis on fait tendre ε vers 0 : le membre de gauche converge par convergence monotone (proposition 3.6), et le membre de droite aussi, les mesures $\Delta u * \chi_\varepsilon$ convergeant faiblement vers Δu . Le bord $\partial\mathbb{D}(a, \rho)$ est de Δu -mesure nulle pour tout ρ hors d'un ensemble dénombrable, ce qui suffit pour l'égalité des intégrales en ρ . $\square$

3.2. Potentiels logarithmiques.

Définition 3.11. Soit μ une mesure positive finie à support compact dans $\mathbf{C}$. Son *potentiel logarithmique* est

$$p_\mu(z) = \int_{\mathbf{C}} \log |z - w| \, d\mu(w) \in [-\infty, +\infty[. \quad (51)$$

Proposition 3.12. Soit μ une mesure positive finie à support compact, de masse m . Alors p_μ est sous-harmonique sur $\mathbf{C}$, harmonique sur $\mathbf{C} \setminus \text{Supp} \mu$, et

$$\Delta p_\mu = \mu, \quad p_\mu(z) = m \log |z| + O(|z|^{-1}) \quad (z \rightarrow \infty). \quad (52)$$

Réciproquement (décomposition de Riesz), si u est sous-harmonique sur U et $D \Subset U$ est un disque, alors $u = p_{\Delta u|_D} + h$ sur D avec h harmonique sur D .

Démonstration. Semi-continuité supérieure. Le noyau $(z, w) \mapsto \log |z - w|$ est semi-continu supérieurement à valeurs dans $[-\infty, C]$ sur $L \times \text{Supp} \mu$ pour tout compact L . Si $z_n \rightarrow z$, le lemme de Fatou appliqué à $C - \log |z_n - w| \geq 0$ donne $\limsup_n p_\mu(z_n) \leq p_\mu(z)$.

Inégalité de la moyenne. Par Fubini–Tonelli (licite après avoir retranché la constante C),

$$M(p_\mu, a, r) = \int \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |a + re^{i\theta} - w| \, d\theta \right) d\mu(w) = \int \log \max(|a - w|, r) \, d\mu(w) \geq p_\mu(a), \quad (53)$$

où l'on a utilisé le calcul classique $M(\log |\cdot - w|, a, r) = \log \max(|a - w|, r)$, lui-même conséquence de l'harmonicité de $\log |z - w|$ pour $|a - w| > r$ et de la formule de Jensen sinon.

Asymptotique. Pour $|z|$ grand, $p_\mu(z) - m \log |z| = \int \log |1 - w/z| \, d\mu(w) = O(|z|^{-1})$ uniformément, puisque $\text{Supp} \mu$ est borné. En particulier $p_\mu \not\equiv -\infty$ et p_μ est sous-harmonique.

Laplacien. Pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{C})$, Fubini et le lemme 3.7 donnent

$$\int p_\mu \Delta \varphi \, d\text{Leb} = \int \left(\int \log |z - w| \Delta \varphi(z) \, d\text{Leb}(z) \right) d\mu(w) = 2\pi \int \varphi \, d\mu, \quad (54)$$

l'interversion étant licite car $\log|z-w|$ est intégrable sur le support de φ , uniformément en w dans un compact. En particulier $\Delta_{p_\mu} = \mu$ est nulle hors de $\text{Supp } \mu$, où p_μ est donc harmonique par le lemme de Weyl.

Décomposition de Riesz. Posons $v = \Delta_u|_D$, mesure finie puisque la formule de Jensen (49) borne la masse de Δ_u sur les disques par $M(u, a, t) - M(u, a, s)$. Alors $\Delta(u - p_v) = 0$ sur D au sens des distributions, donc $u - p_v$ coïncide presque partout avec une fonction harmonique h par le lemme de Weyl; comme deux fonctions sous-harmoniques égales presque partout sont égales (théorème 3.8), l'égalité $u = p_v + h$ a lieu partout sur D . $\square$

Le potentiel détermine la mesure. Voici la forme précise dont nous nous servons.

Proposition 3.13. *Soient μ, v deux mesures positives de même masse à supports compacts. Si $p_\mu - p_v$ est harmonique sur $\mathbf{C}$ et tend vers 0 à l'infini, alors $\mu = v$.*

Démonstration. La fonction $p_\mu - p_v$ est harmonique sur $\mathbf{C}$ et bornée, donc constante par le théorème de Liouville, et cette constante est nulle. On conclut en prenant les laplaciens. $\square$

Le résultat suivant est l'outil de compacité qui remplace, dans le monde sous-harmonique, le théorème d'Ascoli.

Théorème 3.14 (Compacité et convergence). *Soit (u_n) une suite de fonctions sous-harmoniques sur un domaine U , uniformément majorée sur tout compact de U .*

- (1) *Ou bien $u_n \rightarrow -\infty$ uniformément sur tout compact, ou bien une sous-suite converge dans $L^1_{\text{loc}}(U)$ vers une fonction sous-harmonique.*
- (2) *Si $u_n \rightarrow u$ dans $L^1_{\text{loc}}(U)$ avec u sous-harmonique, alors $\Delta_{u_n} \rightarrow \Delta_u$ au sens faible des mesures.*
- (3) *(Lemme de Hartogs) Si $\limsup_n u_n \leq C$ en tout point de U , alors pour tout compact $L \subset U$ et tout $\varepsilon > 0$ on a $\sup_L u_n \leq C + \varepsilon$ pour n assez grand.*

Démonstration. (2) La dérivation au sens des distributions est continue pour la convergence L^1_{loc} : pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$,

$$\int \varphi d\Delta_{u_n} = \frac{1}{2\pi} \int u_n \Delta \varphi d\text{Leb} \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int u \Delta \varphi d\text{Leb} = \int \varphi d\Delta_u. \quad (55)$$

Comme les masses $\Delta_{u_n}(L)$ sont uniformément bornées pour $L \subset U$ compact — conséquence de (49) et de la borne L^1 — la convergence contre les fonctions test entraîne la convergence faible.

(3) Soient $L \subset U$ compact, $\varepsilon > 0$, $a \in L$ et $r > 0$ tel que $\overline{\mathbb{D}}(a, 2r) \subset U$; notons M un majorant uniforme des u_n sur $\overline{\mathbb{D}}(a, 2r)$. Pour $\delta < r$ et $z \in \mathbb{D}(a, \delta)$, on a $\mathbb{D}(a, r - \delta) \subset \mathbb{D}(z, r)$, donc par (43) et en majorant u_n par M sur la différence des deux disques,

$$u_n(z) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}(z, r)} u_n d\text{Leb} \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}(a, r - \delta)} u_n d\text{Leb} + M \left(1 - \frac{(r - \delta)^2}{r^2} \right). \quad (56)$$

Le lemme de Fatou appliqué à $M - u_n \geq 0$ donne $\limsup_n \int_{\mathbb{D}(a, r-\delta)} u_n \leq \int_{\mathbb{D}(a, r-\delta)} \limsup_n u_n \leq C\pi(r-\delta)^2$. En posant $\lambda = (r-\delta)^2/r^2 \leq 1$, il vient

$$\limsup_n \sup_{\mathbb{D}(a, \delta)} u_n \leq \lambda C + (1-\lambda)M = C + (1-\lambda)(M-C), \quad (57)$$

quantité inférieure à $C + \varepsilon$ dès que δ est assez petit. On recouvre L par un nombre fini de tels disques $\mathbb{D}(a, \delta)$.

(1) Supposons qu'il existe $a \in U$ et une sous-suite le long de laquelle $u_n(a) \geq -A$. Par (43), $\int_{\mathbb{D}(a, r)} u_n \geq -\pi r^2 A$ pour tout r tel que $\overline{\mathbb{D}(a, r)} \subset U$; comme $u_n \leq M$ sur ce disque, la suite est bornée dans $L^1(\mathbb{D}(a, r))$. La même inégalité, appliquée en un point $b \in \mathbb{D}(a, r)$ où $u_n(b) \geq -A'$ — il en existe puisque $\int_{\mathbb{D}(a, r)} u_n$ est bornée inférieurement — propage la borne L^1 aux disques voisins, de sorte que l'ensemble des points au voisinage desquels (u_n) est bornée dans L^1 est ouvert et fermé dans U , donc égal à U . La formule de Jensen borne alors uniformément les masses locales des Δ_{u_n} , et l'on extrait par le théorème A.22 une sous-suite telle que $\Delta_{u_n} \rightarrow \nu$ faiblement sur tout disque $D \Subset U$. La décomposition de Riesz $u_n = p_{\Delta_{u_n}|_D} + h_n$ ramène alors la convergence $L^1(D)$ à deux points : la convergence L^1 des potentiels, conséquence de la convergence faible des mesures à supports dans un compact fixe, et celle des fonctions harmoniques h_n , uniformément majorées, qui résulte de l'inégalité de Harnack. Le premier point est le seul énoncé de ce chapitre que nous admettons; voir [12], théorème 3.8.3, ou [9], théorème 4.1.9. Si au contraire $u_n(z) \rightarrow -\infty$ en tout point, le point (3) appliqué avec C arbitrairement négatif donne la convergence uniforme sur les compacts vers $-\infty$. $\square$

Le point (2) est celui qui rend la stratégie du chapitre 5 possible : *pour montrer qu'une suite de mesures converge, il suffit de faire converger leurs potentiels*. Nous utiliserons systématiquement la variante quantitative suivante.

Corollaire 3.15. *Soient (ν_n) des mesures de probabilité portées par un compact fixe L et μ une mesure de probabilité. Si $p_{\nu_n} \rightarrow p_\mu$ uniformément sur $\mathbf{C}$, alors $\nu_n \rightarrow \mu$ faiblement.*

Démonstration. La convergence uniforme entraîne la convergence au sens des distributions, donc $\nu_n = \Delta_{p_{\nu_n}} \rightarrow \Delta_{p_\mu} = \mu$ contre toute fonction test C^∞ à support compact. Comme toutes ces mesures sont des probabilités portées par L , la famille est tendue et la convergence contre les fonctions test entraîne la convergence faible. $\square$

3.3. Énergie, capacité et mesure d'équilibre. Dans toute cette section $K \subset \mathbf{C}$ désigne un compact et $\mathcal{P}(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité portées par K .

Définition 3.16. L'énergie de $\mu \in \mathcal{P}(K)$ est

$$I(\mu) = \iint \log |z - w| d\mu(z) d\mu(w) = \int p_\mu d\mu \in [-\infty, +\infty[. \quad (58)$$

On pose $V(K) = \sup_{\mu \in \mathcal{P}(K)} I(\mu)$ (constante de Robin au signe près) et

$$\text{cap}(K) = e^{V(K)} \in [0, +\infty[, \quad (59)$$

avec la convention $e^{-\infty} = 0$. Un ensemble borélien est dit *polaire* si tout compact qu'il contient est de capacité nulle.

L'intuition électrostatique est la suivante : $-I(\mu)$ est l'énergie potentielle d'une distribution de charge μ , et la mesure d'équilibre est la répartition que prend une charge unité libre de se déplacer sur le conducteur K . La négation de « polaire » sera notre notion de « gros », et l'expression *quasi-partout* (q.p.) signifie : hors d'un ensemble polaire.

Exemple 3.17. (i) $\text{cap } \overline{\mathbb{D}}(a, r) = \text{cap } \partial \mathbb{D}(a, r) = r$, la mesure d'équilibre étant la mesure de Lebesgue normalisée du cercle.

(ii) $\text{cap}[a, b] = (b - a)/4$, la mesure d'équilibre étant la mesure d'Arcsinus $\frac{dt}{\pi\sqrt{(t-a)(b-t)}}$ (exercice 3.27).

(iii) Un ensemble fini, ou dénombrable, est polaire.

(iv) Si $K \subset K'$ alors $\text{cap } K \leq \text{cap } K'$, et $\text{cap}(\lambda K + a) = |\lambda| \text{cap } K$.

Démonstration. (i) Pour σ la mesure uniforme sur $\partial \mathbb{D}(a, r)$, le calcul (53) donne $p_\sigma(z) = \log \max(|z - a|, r)$, donc $I(\sigma) = \log r$ et $V \geq \log r$. Réciproquement, soit $\mu \in \mathcal{P}(\overline{\mathbb{D}}(a, r))$: la fonction $p_\mu - \log |z - a|$ est sous-harmonique sur $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(a, r)$ et tend vers 0 à l'infini par (52), donc $p_\mu \leq \log \max(|z - a|, r)$ sur $\mathbb{C}$ par le théorème 3.2 ; en intégrant contre μ , $I(\mu) \leq \log r$.

(iii) Pour $\mu \in \mathcal{P}(K)$ avec K fini, μ a un atome en un point a , et $\int \log |z - a| d\mu(z) = -\infty$, donc $I(\mu) = -\infty$. Une réunion dénombrable d'ensembles polaires est polaire, car un compact contenu dans la réunion se décompose et l'on applique le théorème de Baire ; voir [12], théorème 3.2.3.

(iv) La première assertion est claire, la seconde résulte de $I(\lambda_* \mu) = I(\mu) + \log |\lambda|$ pour λ_* l'image par $z \mapsto \lambda z + a$. $\square$

Le lemme suivant, dit *principe d'énergie*, est le point technique central de la théorie. Il exprime que le noyau logarithmique est défini négatif sur les mesures signées de masse totale nulle.

Lemme 3.18 (Principe d'énergie). *Soit σ une mesure signée à support compact, de masse totale $\sigma(\mathbb{C}) = 0$ et d'énergie absolue $\iint |\log |z - w|| d|\sigma| d|\sigma|$ finie. Alors $I(\sigma) \leq 0$, avec égalité si et seulement si $\sigma = 0$.*

Démonstration. Partons de l'identité de Frullani $\log s = \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-ts^2}) \frac{dt}{t}$, valable pour $s > 0$. L'hypothèse d'énergie absolue finie autorise le théorème de Fubini, et comme $\iint e^{-t} d\sigma d\sigma = e^{-t} \sigma(\mathbb{C})^2 = 0$,

$$I(\sigma) = -\frac{1}{2} \int_0^\infty Q_t \frac{dt}{t}, \quad Q_t = \iint e^{-t|z-w|^2} d\sigma(z) d\sigma(w). \quad (60)$$

Or le noyau gaussien est de type positif : la formule d'inversion de Fourier dans $\mathbf{R}^2$ donne

$$e^{-t|x|^2} = \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbf{R}^2} e^{-|\xi|^2/4t} e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi, \quad (61)$$

d'où, en posant $\widehat{\sigma}(\xi) = \int e^{i\langle \xi, z \rangle} d\sigma(z)$ et en appliquant Fubini une nouvelle fois,

$$Q_t = \frac{1}{4\pi t} \int_{\mathbf{R}^2} e^{-|\xi|^2/4t} |\widehat{\sigma}(\xi)|^2 d\xi \geq 0. \quad (62)$$

Ainsi $I(\sigma) \leq 0$. En cas d'égalité, $Q_t = 0$ pour presque tout $t > 0$, donc $\widehat{\sigma} \equiv 0$ et $\sigma = 0$ par injectivité de la transformée de Fourier des mesures finies. $\square$

Lemme 3.19. *Une mesure de probabilité à support compact et d'énergie finie ne charge aucun ensemble polaire.*

Démonstration. Soit μ d'énergie finie et E un borélien polaire avec $\mu(E) > 0$. Par régularité intérieure il existe un compact $F \subset E$ avec $\mu(F) > 0$. La mesure $\nu = \mu(F)^{-1}\mu|_F$ appartient à $\mathcal{P}(F)$ et

$$I(\nu) = \frac{1}{\mu(F)^2} \iint_{F \times F} \log|z - w| d\mu d\mu \geq \frac{1}{\mu(F)^2} (I(\mu) - C) > -\infty, \quad (63)$$

où C majore la contribution du complémentaire, bornée puisque $\log|z - w|$ l'est supérieurement sur un compact. Donc $\text{cap } F > 0$, contredisant la polarité de E . $\square$

Nous admettons enfin la variante suivante du principe du maximum, qui autorise un ensemble polaire d'exceptions au bord ; c'est le seul point de la théorie où la finesse de la notion de capacité est réellement utilisée ([12], théorème 3.6.9).

Théorème 3.20 (Principe du maximum étendu). *Soit u sous-harmonique et majorée sur un domaine $U \subsetneq \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Si $\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0$ pour tout $\zeta \in \partial U$ hors d'un ensemble polaire, alors $u \leq 0$ sur U .*

Théorème 3.21 (Mesure d'équilibre, Frostman). *Soit K un compact non polaire. Alors il existe une unique mesure $\mu_K \in \mathcal{P}(K)$ telle que $I(\mu_K) = V(K)$; on l'appelle mesure d'équilibre de K . Son support est contenu dans ∂K , et son potentiel vérifie*

$$p_{\mu_K} \geq V(K) \text{ sur } \mathbf{C}, \quad p_{\mu_K} = V(K) \text{ quasi-partout sur } K. \quad (64)$$

Démonstration. Existence. Pour $m > 0$, posons $\ell_m(z, w) = \max(\log|z - w|, -m)$, fonction continue sur $\mathbf{C}^2$, et $I_m(\mu) = \iint \ell_m d\mu d\mu$. L'application $\mu \mapsto I_m(\mu)$ est continue sur $\mathcal{P}(K)$ pour la topologie faible, puisque ℓ_m est continue bornée sur $K \times K$ et que $\mu_n \rightarrow \mu$ entraîne $\mu_n \otimes \mu_n \rightarrow \mu \otimes \mu$. Comme ℓ_m décroît vers $\log|z - w|$, la convergence monotone donne $I = \inf_m I_m$: l'énergie est donc semi-continue supérieurement sur $\mathcal{P}(K)$. Or $\mathcal{P}(K)$ est compact pour la topologie faible (théorème A.22), donc I y atteint son maximum $V(K)$, fini car K est non polaire.

Unicité. Soient μ, μ' deux maximiseurs, nécessairement d'énergie finie. L'énergie est une forme quadratique, et l'identité de polarisation donne

$$I(\mu - \mu') = 2I(\mu) + 2I(\mu') - 4I\left(\frac{\mu + \mu'}{2}\right) \geq 4V(K) - 4V(K) = 0, \quad (65)$$

puisque $\frac{\mu + \mu'}{2} \in \mathcal{P}(K)$. La mesure signée $\sigma = \mu - \mu'$ est de masse totale nulle et d'énergie absolue finie ; le lemme 3.18 force $\sigma = 0$.

Inégalité $p_{\mu_K} \geq V(K)$ quasi-partout sur K . Notons $p = p_{\mu_K}$ et supposons par l'absurde que $E = \{z \in K \mid p(z) < V(K)\}$ ne soit pas polaire. Alors $E = \bigcup_k \{z \in K \mid p(z) \leq V(K) - 1/k\}$, réunion dénombrable de compacts (p est semi-continue supérieurement), dont l'un, disons F , n'est pas polaire. Soit $\nu = \mu_F$ sa mesure d'équilibre, d'énergie finie, et $\sigma = \nu - \mu_K$. Pour $t \in [0, 1]$, la mesure $\mu_t = \mu_K + t\sigma \in \mathcal{P}(K)$ a pour énergie

$$I(\mu_t) = I(\mu_K) + 2t \int p d\sigma + t^2 I(\sigma). \quad (66)$$

Or $\int p d\nu \leq V(K) - 1/k$ puisque ν est portée par F , tandis que $\int p d\mu_K = I(\mu_K) = V(K)$: donc $\int p d\sigma \leq -1/k < 0$. Comme $I(\sigma)$ est finie, $I(\mu_t) > I(\mu_K)$ pour $t > 0$ assez petit, ce qui contredit la maximalité.

Égalité quasi-partout sur K . D'après le lemme 3.19, μ_K ne charge pas les ensembles polaires, donc $p \geq V(K)$ μ_K -presque partout ; comme $\int p d\mu_K = V(K)$, on a $p = V(K)$ μ_K -presque partout. Soit $a \in \text{Supp } \mu_K$: tout voisinage de a contient des points où $p = V(K)$, et la semi-continuité supérieure de p donne $p(a) \geq V(K)$; l'inégalité inverse s'obtient en écrivant, grâce à la formule de Jensen et à $p \geq V(K)$ q.p. sur K , que p ne peut dépasser $V(K)$ sur un ensemble de μ_K -mesure positive. On en déduit $p = V(K)$ sur $\text{Supp } \mu_K$, puis quasi-partout sur K par ce qui précède.

Inégalité sur $\mathbf{C}$ tout entier. La fonction $u = V(K) - p$ est sous-harmonique sur $\mathbf{C} \setminus K$, majorée près de K , et tend vers $-\infty$ à l'infini par (52). Ses valeurs limites au bord de $\mathbf{C} \setminus K$ sont ≤ 0 quasi-partout d'après ce qui précède, donc $u \leq 0$ par le théorème 3.20 appliqué sur chaque composante de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus K$.

Support. La fonction p est harmonique sur $\mathbf{C} \setminus \text{Supp } \mu_K$ et vaut $V(K)$ sur $\text{Supp } \mu_K$; si un point a de $\text{Supp } \mu_K$ était intérieur à K , la fonction $p - V(K) \geq 0$ atteindrait son minimum 0 en a tout en étant harmonique au voisinage de a dans le complémentaire du support, ce qui contredit le principe du minimum sur la composante correspondante. Donc $\text{Supp } \mu_K \subset \partial K$. $\square$

3.4. Fonction de Green d'un compact.

Définition 3.22. Soit K un compact non polaire. Sa *fonction de Green* (avec pôle à l'infini) est

$$g_K = p_{\mu_K} - V(K). \quad (67)$$

D'après (64), $g_K \geq 0$ sur $\mathbf{C}$ et $g_K = 0$ quasi-partout sur K ; de plus g_K est harmonique sur $\mathbf{C} \setminus K$, et (52) donne

$$g_K(z) = \log |z| - \log \text{cap}(K) + o(1) \quad (z \rightarrow \infty). \quad (68)$$

Le nombre $-\log \text{cap}(K) = -V(K)$ s'appelle la *constante de Robin* de K . Pour $K = \overline{\mathbb{D}}(0, r)$ on retrouve $g_K(z) = \log^+(|z|/r)$.

Le théorème suivant est la caractérisation que nous utiliserons au chapitre 4 pour identifier la fonction de Green dynamique d'un polynôme. Il mérite d'être retenu : *une fonction positive, continue, harmonique hors de K , nulle sur K et logarithmique à l'infini est nécessairement la fonction de Green de K .*

Théorème 3.23. *Soit $K \subset \mathbf{C}$ un compact et $g : \mathbf{C} \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction continue telle que*

- (1) *g est harmonique sur $\mathbf{C} \setminus K$;*
- (2) *$g = 0$ sur K ;*
- (3) *$g(z) - \log |z| \rightarrow \gamma \in \mathbf{R}$ lorsque $z \rightarrow \infty$.*

Alors K est non polaire, $\text{cap}(K) = e^{-\gamma}$, $g = g_K$, et $\frac{1}{2\pi}\Delta g = \mu_K$.

Démonstration. Étape 1 : g est sous-harmonique. Elle est continue, harmonique hors de K , et en un point $a \in K$ on a $g(a) = 0 \leq M(g, a, r)$ puisque $g \geq 0$.

Étape 2 : $\mu := \frac{1}{2\pi}\Delta g$ est une probabilité portée par K . La positivité et la localisation du support résultent de l'étape 1 et de l'harmonicité hors de K . Pour la masse, appliquons la formule de Jensen (49) en $a = 0$: pour t grand, $\overline{\mathbb{D}}(0, \rho) \supset K$ dès que $\rho \geq \rho_0$, donc

$$M(g, 0, t) - M(g, 0, \rho_0) = \int_{\rho_0}^t \mu(\overline{\mathbb{D}}(0, \rho)) \frac{d\rho}{\rho} = \mu(\mathbf{C}) \log \frac{t}{\rho_0}. \quad (69)$$

Or l'hypothèse (3) donne $M(g, 0, t) = \log t + \gamma + o(1)$, de sorte que le membre de gauche vaut $\log t + O(1)$; en divisant par $\log t$ et en faisant tendre t vers l'infini, $\mu(\mathbf{C}) = 1$.

Étape 3 : identification du potentiel. La fonction $g - p_\mu$ est harmonique sur $\mathbf{C}$ tout entier, puisque les deux termes ont même laplacien, et elle tend vers γ à l'infini d'après (52) et l'hypothèse (3); le théorème de Liouville donne

$$p_\mu = g - \gamma. \quad (70)$$

En intégrant contre μ , dont le support est dans K où g s'annule, il vient $I(\mu) = -\gamma$; en particulier $V(K) \geq -\gamma > -\infty$ et K est non polaire.

Étape 4 : μ maximise l'énergie. Soit $\nu \in \mathcal{P}(K)$ d'énergie finie. Le lemme 3.18 appliqué à $\sigma = \nu - \mu$ donne $I(\nu) - 2 \int p_\mu d\nu + I(\mu) \leq 0$, et comme $p_\mu = g - \gamma = -\gamma$ sur $K \supset \text{Supp } \nu$,

$$I(\nu) \leq 2 \int p_\mu d\nu - I(\mu) = -2\gamma + \gamma = -\gamma. \quad (71)$$

Les mesures d'énergie infinie ne pouvant réaliser le supremum, $V(K) = -\gamma$ et le maximum est atteint en μ : par unicité dans le théorème 3.21, $\mu = \mu_K$, $\text{cap}(K) = e^{-\gamma}$ et $g = p_{\mu_K} - V(K) = g_K$. $\square$

Remarque 3.24. L'hypothèse de continuité de g sur $\mathbf{C}$ est une hypothèse de *régularité* du compact K : en général g_K n'est nulle que quasi-partout sur K et peut être discontinue en certains points de ∂K (points irréguliers, par exemple la pointe d'une cuspide extérieure ou un point isolé de K). Nous verrons que les ensembles de Julia remplis sont toujours réguliers, ce qui n'a rien d'évident *a priori*.

3.5. Exercices.

Exercice 3.25. Soit u sous-harmonique sur $\mathbf{C}$ telle que $u(z) \leq \log |z| + O(1)$ à l'infini. Montrer, à l'aide de la formule de Jensen (49), que Δ_u est de masse totale au plus 1. Que dire si u est bornée supérieurement ?

Exercice 3.26. Calculer p_μ pour μ la mesure uniforme sur le cercle $\partial\mathbb{D}(a, r)$, puis pour μ la mesure de Lebesgue normalisée sur le disque $\overline{\mathbb{D}}(a, r)$. Vérifier que les deux potentiels coïncident hors du disque et en déduire que $\text{cap } \overline{\mathbb{D}}(a, r) = r$ de deux façons.

Exercice 3.27. En utilisant l'application $w \mapsto w + 1/w$ de l'exemple 2.17, montrer que $g_{[-2,2]}(z) = \log \left| \frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{2} \right|$ pour une détermination convenable de la racine, puis retrouver $\text{cap}[-2, 2] = 1$ par le théorème 3.23. En déduire $\text{cap}[a, b] = (b - a)/4$.

Exercice 3.28. Montrer qu'un ensemble polaire est de mesure de Lebesgue nulle. (Si $\text{Leb}(K) > 0$, montrer que la mesure de Lebesgue restreinte à K , normalisée, est d'énergie finie.) Montrer réciproquement qu'un compact de mesure de Lebesgue nulle peut être non polaire.

Exercice 3.29. Soit P un polynôme unitaire de degré d et K un compact non polaire. Montrer que $g_{P^{-1}(K)} = \frac{1}{d} g_K \circ P$ et en déduire $\text{cap}(P^{-1}(K)) = (\text{cap } K)^{1/d}$. (Utiliser le théorème 3.23 et la proposition 3.9.)

Exercice 3.30. Soit K un compact non polaire et, pour $n \geq 2$, soient $z_1, \dots, z_n \in K$ maximisant $\prod_{i < j} |z_i - z_j|$ (*points de Fekete*). Montrer que $\delta_n = \left(\prod_{i < j} |z_i - z_j| \right)^{2/n(n-1)}$ est décroissante et que $\lim_n \delta_n \geq \text{cap } K$. (On peut montrer qu'il y a égalité : c'est le théorème de Fekete–Szegő.)

Exercice 3.31. Démontrer l'identité de polarisation utilisée dans la démonstration du théorème 3.21, et vérifier que toutes les énergies qui y figurent sont finies.

4. LA FONCTION DE GREEN D'UN POLYNÔME

Dans tout ce chapitre $f(z) = a_d z^d + \dots + a_0$ est un polynôme de degré $d \geq 2$. Nous allons lui associer une fonction G_f qui mesure la vitesse d'échappement des orbites vers l'infini, et qui est simultanément deux choses : un objet *dynamique*, caractérisé par l'équation fonctionnelle $G_f \circ f = d G_f$; et un objet de *théorie du potentiel*, à savoir la fonction de Green du compact K_f au sens de la définition 3.22. C'est cette coïncidence qui donne accès à toute la théorie du chapitre 3, et en particulier à la mesure d'équilibre de K_f , qui sera la mesure canonique de la dynamique.

4.1. Construction.

Lemme 4.1. *Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbf{C}$,*

$$|\log^+ |f(z)| - d \log^+ |z|| \leq C, \quad (72)$$

où $\log^+ t = \max(\log t, 0)$.

Démonstration. Choisissons $R \geq 1$ tel que $\frac{1}{2}|a_d||z|^d \leq |f(z)| \leq 2|a_d||z|^d$ pour $|z| \geq R$; pour de tels z , $\log^+ |f(z)| = \log |f(z)| = d \log |z| + O(1)$ avec une constante ne dépendant que de a_d . Pour $|z| \leq R$, les deux quantités $\log^+ |f(z)|$ et $d \log^+ |z|$ sont bornées par $\max_{\mathbb{D}(0,R)} \log^+ |f|$ et $d \log R$ respectivement. $\square$

Théorème 4.2. *La suite de fonctions $z \mapsto d^{-n} \log^+ |f^n(z)|$ converge uniformément sur $\mathbf{C}$. Sa limite*

$$G_f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log^+ |f^n(z)| \quad (73)$$

est continue, sous-harmonique, positive, et vérifie :

- (1) $G_f \circ f = d G_f$;
- (2) $|G_f(z) - \log^+ |z|| \leq C/(d-1)$ avec C comme en (72);
- (3) $\{G_f = 0\} = K_f$, et G_f est harmonique sur $\mathbf{C} \setminus K_f$;
- (4) $G_f(z) - \log |z| \rightarrow \gamma_f := \frac{\log |a_d|}{d-1}$ lorsque $z \rightarrow \infty$.

Démonstration. Posons $g_n = d^{-n} \log^+ |f^n|$. Le lemme 4.1 appliqué au point $f^n(z)$ donne

$$|g_{n+1}(z) - g_n(z)| = \frac{1}{d^{n+1}} |\log^+ |f(f^n(z))| - d \log^+ |f^n(z)|| \leq \frac{C}{d^{n+1}}, \quad (74)$$

uniformément en $z \in \mathbf{C}$. La série télescopique $\sum (g_{n+1} - g_n)$ converge donc normalement sur $\mathbf{C}$ et $G_f = \lim g_n$ existe, est continue comme limite uniforme de fonctions continues, et sous-harmonique comme limite uniforme de fonctions sous-harmoniques (proposition 3.5), chaque $g_n = d^{-n} \max(\log |f^n|, 0)$ l'étant. En sommant (74) à partir de $n = 0$ on obtient (2). L'identité (1) est immédiate :

$$G_f(f(z)) = \lim_n \frac{1}{d^n} \log^+ |f^{n+1}(z)| = d \lim_n \frac{1}{d^{n+1}} \log^+ |f^{n+1}(z)| = d G_f(z). \quad (75)$$

Pour (3) : si $z \in K_f$, l'orbite est bornée par un M et $g_n(z) \leq d^{-n} \log^+ M \rightarrow 0$, donc $G_f(z) = 0$. Si $z \notin K_f$, alors $|f^n(z)| \rightarrow \infty$, et pour n assez grand (2) donne $G_f(f^n(z)) \geq \log |f^n(z)| - C/(d-1) > 0$, d'où $G_f(z) = d^{-n} G_f(f^n(z)) > 0$ par (1). Sur $\{|z| > R\}$, les fonctions $d^{-n} \log^+ |f^n|$ sont harmoniques (car f^n n'y a pas de zéro, quitte à agrandir R) et convergent uniformément vers G_f , donc G_f y est harmonique; et pour $z_0 \notin K_f$ quelconque, on choisit n avec $|f^n(z_0)| > R$ et l'on écrit $G_f = d^{-n} G_f \circ f^n$ au voisinage de z_0 , composée d'une fonction harmonique et d'une fonction holomorphe.

Pour (4), posons $u = G_f - \log |z|$ sur $\{|z| > R\}$: c'est une fonction harmonique et bornée par (2), donc elle se prolonge harmoniquement à travers l'infini et admet une limite γ_f en ∞ . En écrivant $G_f \circ f = d G_f$ sous la forme $\log |f(z)| + u(f(z)) = d \log |z| + d u(z)$ et en utilisant $\log |f(z)| = d \log |z| + \log |a_d| + o(1)$, on obtient à la limite $\gamma_f + \log |a_d| = d \gamma_f$, d'où (4). $\square$

Proposition 4.3. *L'ensemble K_f est plein : $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus K_f$ est connexe.*

Démonstration. Soit V une composante connexe bornée de $\mathbf{C} \setminus K_f$. Alors G_f est harmonique sur V , continue sur $\bar{V}$, et nulle sur $\partial V \subset K_f$. Le principe du maximum donne $G_f \equiv 0$ sur V , donc $V \subset K_f$: contradiction. Toute composante de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus K_f$ contient donc ∞ , et il n'y en a qu'une. $\square$

4.2. La mesure d'équilibre.

Théorème 4.4. *Le compact K_f est non polaire et régulier, G_f est sa fonction de Green,*

$$\text{cap}(K_f) = |a_d|^{-1/(d-1)}, \quad (76)$$

et la mesure

$$\mu_f = \frac{1}{2\pi} \Delta G_f \quad (77)$$

est la mesure d'équilibre de K_f . De plus $\text{Supp} \mu_f = \mathcal{J}(f)$.

Démonstration. La fonction G_f est continue, positive, nulle exactement sur K_f , harmonique sur $\mathbf{C} \setminus K_f$, et $G_f(z) - \log |z| \rightarrow \gamma_f$: le théorème 3.23 s'applique et donne tout, avec $\text{cap} K_f = e^{-\gamma_f} = |a_d|^{-1/(d-1)}$. Pour le support : G_f est harmonique sur $\mathbf{C} \setminus K_f$ et identiquement nulle sur $\text{Int} K_f$, donc $\text{Supp} \mu_f \subset \partial K_f = \mathcal{J}(f)$. Réciproquement, si $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ et si μ_f était nulle sur un disque $D \ni z_0$, alors G_f serait harmonique sur D , positive, et nulle au point $z_0 \in K_f$: le principe du minimum forcerait $G_f \equiv 0$ sur D , donc $D \subset K_f$ et $z_0 \in \text{Int} K_f$, contredisant $z_0 \in \partial K_f$. $\square$

Lorsque f est unitaire, $\gamma_f = 0$, $\text{cap}(K_f) = 1$ et l'on a l'identité fondamentale, qui sera utilisée constamment au chapitre 5 :

$$G_f = p_{\mu_f}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad G_f(z) = \int \log |z - w| d\mu_f(w). \quad (78)$$

Le lemme suivant explicite le comportement des potentiels sous l'action de f . Rappelons que l'image inverse d'une mesure ν par f est définie par $f^*\nu = \int \left(\sum_{f(b)=a} \deg_b f \cdot \delta_b \right) d\nu(a)$; c'est une mesure de masse $d\nu(\mathbf{C})$, et $f_*f^* = d \cdot \text{id}$.

Lemme 4.5. *Soit ν une mesure positive finie à support compact. Alors*

$$p_{f^*\nu} = p_\nu \circ f - \nu(\mathbf{C}) \log |a_d|, \quad \text{et} \quad \Delta_{u \circ f} = f^* \Delta_u \quad (79)$$

pour toute fonction u sous-harmonique sur $\mathbf{C}$.

Démonstration. Pour $a \in \mathbf{C}$ fixé, la factorisation $f(z) - a = a_d \prod_{f(b)=a} (z - b)^{\deg_b f}$ donne

$$\log |f(z) - a| = \log |a_d| + \sum_{f(b)=a} \deg_b f \log |z - b| = \log |a_d| + p_{f^*\delta_a}(z). \quad (80)$$

On intègre alors contre $d\nu(a)$ et l'on applique le théorème de Fubini, licite car les intégrandes sont majorées. La seconde identité s'en déduit en prenant les laplaciens, d'abord pour $u = p_\nu$, puis dans le cas général par décomposition de Riesz (proposition 3.12). $\square$

Corollaire 4.6. *La mesure μ_f est équilibrée et invariante :*

$$f^*\mu_f = d\mu_f, \quad f_*\mu_f = \mu_f. \quad (81)$$

Démonstration. En appliquant le lemme 4.5 à $u = G_f$ et en utilisant $G_f \circ f = d G_f$, on obtient $f^*\mu_f = \Delta_{G_f \circ f} = \Delta_{d G_f} = d\mu_f$. On applique alors f_* et l'on utilise $f_*f^* = d \cdot \text{id}$. $\square$

L'invariance $f_*\mu_f = \mu_f$ signifie que μ_f est une mesure de probabilité invariante pour le système dynamique $(\mathcal{J}(f), f)$: nous disposons donc d'un objet de théorie ergodique, canoniquement attaché à f . L'égalité $f^*\mu_f = d\mu_f$ est bien plus forte : elle dit que μ_f se répartit uniformément entre les d branches inverses de f , et c'est elle qui gouvernera tous les énoncés d'équidistribution.

Proposition 4.7. *La mesure μ_f n'a pas d'atome.*

Démonstration. Soit $m = \max_{a \in \mathbf{C}} \mu_f(\{a\})$, atteint car μ_f est une mesure de probabilité à support compact et l'ensemble des atomes de masse $\geq m$ est fini. Soit a un atome maximal. L'égalité $f^*\mu_f = d\mu_f$ donne $\mu_f(\{a\}) = \frac{1}{d} \sum_{f(b)=a} \deg_b f \cdot \mu_f(\{b\})$; comme $\sum_{f(b)=a} \deg_b f = d$ et que chaque $\mu_f(\{b\}) \leq m$, l'égalité force $\mu_f(\{b\}) = m$ pour tout $b \in f^{-1}(a)$. Par récurrence, tout point de $\bigcup_n f^{-n}(a)$ est un atome de masse m . Si $m > 0$ cet ensemble est fini, donc a est exceptionnel ; mais $a \in \text{Supp } \mu_f = \mathcal{J}(f)$ et $E_f \subset \mathcal{F}(f)$ par la proposition 2.10 : contradiction. $\square$

4.3. Coordonnée de Böttcher et critère de connexité. Le point ∞ est un point fixe superattractif de degré local d ; le théorème 2.7 fournit donc, dans la carte $w = 1/z$, une coordonnée linéarisante.

Théorème 4.8. *Soit f unitaire de degré $d \geq 2$. Il existe $R > 0$ et une unique application holomorphe injective*

$$\varphi : \{|z| > R\} \longrightarrow \{|w| > R\}, \quad \varphi(z) = z + O(1), \quad (82)$$

telle que $\varphi \circ f = \varphi^d$. De plus $G_f = \log |\varphi|$ là où φ est définie. Enfin, si l'on pose

$$\rho_f = \max \{G_f(c) \mid c \in \text{Crit}(f) \cap \mathbf{C}\}, \quad (83)$$

alors φ se prolonge en un biholomorphisme de $\{G_f > \rho_f\}$ sur $\{|w| > e^{\rho_f}\}$.

Démonstration (esquisse). L'existence et l'unicité de φ au voisinage de l'infini résultent du théorème 2.7 appliqué dans la carte $w = 1/z$, où f s'écrit $w \mapsto w^d(1 + O(w))$. L'égalité $G_f = \log |\varphi|$ vient de ce que $\log |\varphi|$ est harmonique, vérifie $\log |\varphi \circ f| = d \log |\varphi|$ et $\log |\varphi(z)| = \log |z| + o(1)$: la différence $G_f - \log |\varphi|$ est harmonique bornée au voisinage de ∞ , tend vers 0, et est multipliée par d sous l'action de f , donc est nulle. Pour le prolongement, on remarque que $\{G_f > r\}$ ne contient pas de point critique dès que $r \geq \rho_f$, de sorte que $f : \{G_f > r\} \rightarrow \{G_f > dr\}$ est un revêtement non ramifié de degré d ; on prolonge alors φ de proche en proche par la formule $\varphi(z) = \varphi(f(z))^{1/d}$, la branche de la racine étant déterminée par continuité, ce qui est licite car les domaines concernés sont simplement connexes. $\square$

Théorème 4.9 (Dichotomie de Fatou–Julia). *Soit f un polynôme de degré $d \geq 2$.*

- (1) *Si tous les points critiques de f dans $\mathbf{C}$ appartiennent à K_f , alors K_f est connexe et φ est un biholomorphisme de $\mathbf{C} \setminus K_f$ sur $\mathbf{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.*
- (2) *Si tous les points critiques de f dans $\mathbf{C}$ sont hors de K_f , alors $K_f = \mathcal{J}(f)$ est un ensemble de Cantor.*

En particulier, pour $d = 2$, K_f est connexe ou totalement discontinu selon que l'unique point critique appartient ou non à K_f .

Démonstration (esquisse). Dans le cas (1), $\rho_f = 0$ et le théorème 4.8 fournit un biholomorphisme entre $\mathbf{C} \setminus K_f = \{G_f > 0\}$ et l'extérieur du disque unité; le complémentaire de K_f dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ étant biholomorphe à un disque, K_f est connexe. Dans le cas (2), soit $r > \rho_f$; l'ouvert $U_0 = \{G_f < r\}$ est un disque topologique et $U_n = f^{-n}(U_0) = \{G_f < r/d^n\}$. Un calcul d'Euler–Poincaré via la formule de Riemann–Hurwitz montre que chaque composante de U_n est un disque topologique, que ces composantes sont en nombre d^n dès que n est assez grand, et que leurs diamètres tendent vers 0; comme $K_f = \bigcap_n U_n$, on obtient un ensemble de Cantor. Les détails se trouvent dans [11], §9 et §17, ou [6], chapitre III. $\square$

Exemple 4.10. (i) Pour $f(z) = z^d : G_f(z) = \log^+ |z|$, $K_f = \overline{\mathbb{D}}$, $\text{cap } K_f = 1$, et μ_f est la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$.

(ii) Pour $f(z) = z^2 - 2 : K_f = [-2, 2]$ et $G_f(z) = \log \left| \frac{z + \sqrt{z^2 - 4}}{2} \right|$, de sorte que $\text{cap } K_f = 1$ et que μ_f est la mesure d'Arcsin $\frac{dt}{\pi\sqrt{4-t^2}}$ sur $[-2, 2]$.

(iii) Pour $f(z) = z^2 + c$ avec $|c|$ grand, $\mathcal{J}(f)$ est un Cantor et μ_f en est la mesure d'équilibre; elle n'a pas d'atome et charge tout ouvert rencontrant $\mathcal{J}(f)$.

Remarque 4.11. On peut montrer que G_f est höldérienne sur $\mathbf{C}$, et lipschitzienne si K_f est connexe et $\mathcal{J}(f)$ localement connexe. En revanche G_f n'est jamais de classe C^1 au voisinage de $\mathcal{J}(f)$ lorsque celui-ci n'est pas un cercle ou un segment : la géométrie fractale de $\mathcal{J}(f)$ se lit exactement dans le défaut de régularité de G_f .

4.4. Exercices.

Exercice 4.12. Montrer que G_f est l'unique fonction continue $g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $g \circ f = dg$ et $g - \log^+ |z|$ soit bornée. (Considérer $h = g - G_f$ et utiliser $h \circ f = dh$.)

Exercice 4.13. Soit $\phi(z) = \lambda z + b$ et $g = \phi f \phi^{-1}$. Exprimer G_g en fonction de G_f et $\text{cap } K_g$ en fonction de $\text{cap } K_f$. Vérifier la cohérence avec (76).

Exercice 4.14. Soit $f(z) = z^2 + c$. Montrer que $G_f(0) > 0$ si et seulement si $\mathcal{J}(f)$ est un Cantor, et que dans ce cas $G_f(c) = 2G_f(0)$. Calculer ρ_f et décrire $\{G_f > \rho_f\}$.

Exercice 4.15. Montrer que pour tout polynôme unitaire f de degré $d \geq 2$, $\text{cap}(\mathcal{J}(f)) = \text{cap}(K_f) = 1$. En déduire que $\mathcal{J}(f)$ n'est jamais contenu dans un disque de rayon < 1 , puis que $\text{diam } \mathcal{J}(f) \geq 2$.

Exercice 4.16. Soit T_d l'unique polynôme unitaire de degré d tel que $T_d(w + w^{-1}) = w^d + w^{-d}$ (polynôme de Tchebychev normalisé). Montrer que $K_{T_d} = [-2, 2]$ et calculer G_{T_d} et μ_{T_d} .

Exercice 4.17. Soit f unitaire de degré d et $z_1, \dots, z_{d^n}$ les racines de $f^n(z) = a$ pour un a fixé. Montrer que $\frac{1}{d^n} \sum_i \log |z - z_i| = \frac{1}{d^n} \log |f^n(z) - a|$ et que cette quantité converge vers $G_f(z)$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{C} \setminus K_f$.

5. THÉORÈMES D'ÉQUIDISTRIBUTION

Dans tout ce chapitre f est un polynôme *unitaire* de degré $d \geq 2$, ce qui ne restreint pas la généralité (§1) et permet d'écrire, d'après (78),

$$G = G_f = p_{\mu_f}, \quad \mu = \mu_f, \quad K = K_f, \quad \mathcal{J} = \mathcal{J}(f). \quad (84)$$

La question posée dans ce chapitre est la suivante : la mesure μ a été construite par la théorie du potentiel, mais *que décrit-elle* ? La réponse est qu'elle décrit la répartition asymptotique de presque tous les objets dynamiques finis que l'on sait fabriquer : les préimages $f^{-n}(a)$ d'un point, les points périodiques de période n , les racines de $f^n = g$ pour g fixé. Toutes ces familles finies de points, réparties de façon très différente au départ, s'équidistribuent vers la même mesure μ : c'est en ce sens que μ est la mesure canonique de f .

La stratégie est toujours la même, et repose sur la remarque suivante. Si $\nu_n = \frac{1}{d^n} \sum_i \delta_{z_i}$ est la mesure de comptage normalisée des racines d'un polynôme unitaire P_n de degré d^n , alors

$$p_{\nu_n}(z) = \frac{1}{d^n} \log |P_n(z)|, \quad (85)$$

et il suffit, d'après le théorème 3.14, de faire converger le membre de droite vers G dans L^1_{loc} . Autrement dit : *équidistribuer des racines, c'est estimer $\frac{1}{d^n} \log |P_n|$* .

5.1. L'opérateur de transfert.

Définition 5.1. Pour ν mesure de probabilité à support compact dans $\mathbf{C}$, on pose

$$T\nu = \frac{1}{d} f^* \nu. \quad (86)$$

C'est encore une mesure de probabilité, et $T^n \nu = d^{-n} (f^n)^* \nu$ décrit la répartition des préimages d'ordre n des points répartis selon ν . Le lemme 4.5 se traduit, pour f unitaire, par

$$p_{T\nu} = \frac{1}{d} p_\nu \circ f, \quad (87)$$

et le corollaire 4.6 dit exactement que $T\mu = \mu$. La formule (87) montre que T agit sur les potentiels de façon *contractante* : c'est toute la théorie.

Théorème 5.2. Soit ν une mesure de probabilité à support compact telle que $p_\nu - G$ soit bornée sur $\mathbf{C}$. Alors, pour tout $n \geq 0$,

$$\|p_{T^n \nu} - G\|_\infty \leq \frac{1}{d^n} \|p_\nu - G\|_\infty, \quad (88)$$

et par conséquent $T^n \nu \rightarrow \mu$ faiblement, avec une vitesse géométrique de raison $1/d$.

Démonstration. Les identités $p_{T\nu} = \frac{1}{d} p_\nu \circ f$ et $G = \frac{1}{d} G \circ f$ donnent

$$p_{T\nu} - G = \frac{1}{d} (p_\nu - G) \circ f, \quad (89)$$

d'où $\|p_{T^v} - G\|_\infty \leq \frac{1}{d} \|p_v - G\|_\infty$, et (88) par récurrence. Choisissons R tel que $f^{-1}(\overline{\mathbb{D}}(0, R)) \subset \overline{\mathbb{D}}(0, R)$ et $\text{Supp } v \subset \overline{\mathbb{D}}(0, R)$: alors toutes les mesures $T^n v$ sont portées par le compact $\overline{\mathbb{D}}(0, R)$, et le corollaire 3.15 s'applique. $\square$

C'est un énoncé d'une grande souplesse : l'hypothèse ne porte que sur le potentiel de v , et pas du tout sur la position de $\text{Supp } v$ par rapport à $\mathcal{J}$.

Corollaire 5.3. *Soit $\sigma_{a,r}$ la mesure uniforme sur le cercle $\partial\mathbb{D}(a, r)$. Alors $d^{-n}(f^n)^*\sigma_{a,r} \rightarrow \mu$ pour tous $a \in \mathbf{C}$ et $r > 0$. De même, si L est un compact non polaire quelconque et μ_L sa mesure d'équilibre, et si g_L est continue, alors $d^{-n}(f^n)^*\mu_L \rightarrow \mu$.*

Démonstration. Dans le premier cas $p_{\sigma_{a,r}}(z) = \log \max(|z - a|, r)$ est continue et vérifie $p_{\sigma_{a,r}}(z) - G(z) \rightarrow 0$ à l'infini, donc est bornée. Dans le second, $p_{\mu_L} = g_L + \log \text{cap } L$ est continue et $p_{\mu_L} - G \rightarrow 0$ à l'infini. $\square$

5.2. Unicité de la mesure équilibrée. Le théorème 5.2 caractérise déjà μ comme unique point fixe « régulier » de T . Le résultat suivant est plus fort et purement statique : il identifie μ parmi toutes les mesures équilibrées, sans hypothèse de convergence.

Théorème 5.4. *Soit v une mesure de probabilité à support compact vérifiant $f^*v = dv$ et d'énergie finie, c'est-à-dire $I(v) > -\infty$. Alors $v = \mu$.*

Démonstration. Étape 1 : $\text{Supp } v \subset K$. L'égalité $f^*v = dv$ donne $f^{-1}(\text{Supp } v) = \text{Supp}(f^*v) = \text{Supp } v$, donc $S = \text{Supp } v$ est un compact totalement invariant ; les orbites issues de S restent dans S , donc sont bornées, et $S \subset K$.

Étape 2 : $h := p_v - G \leq 0$. La fonction h est semi-continue supérieurement sur $\mathbf{C}$ (p_v l'est, G est continue) et tend vers 0 à l'infini d'après (52) ; on la prolonge par $h(\infty) = 0$, ce qui en fait une fonction s.c.s. sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, laquelle atteint donc son maximum $M \geq 0$. Par (87) appliqué à v équilibrée, $p_v \circ f = dp_v$, donc

$$h \circ f = dh. \quad (90)$$

Si $M > 0$, le maximum est atteint en un point $z_0 \in \mathbf{C}$, et $h(f(z_0)) = dM > M$: contradiction. Donc $M \leq 0$.

Étape 3 : conclusion. Comme $I(v) = \int p_v dv$ est finie et que G est bornée sur S , la fonction h est v -intégrable. L'égalité $f^*v = dv$ entraîne $f_*v = v$, d'où $\int h \circ f dv = \int h d(f_*v) = \int h dv$; joint à (90), cela donne $(d - 1) \int h dv = 0$, donc $\int h dv = 0$. Comme $h \leq 0$, on en déduit $h = 0$ v -presque partout. Or $G = 0$ sur $S \subset K$, donc $p_v = 0$ v -presque partout et

$$I(v) = \int p_v dv = 0 = V(K). \quad (91)$$

Ainsi v est une mesure de probabilité portée par K réalisant le maximum d'énergie : par unicité dans le théorème 3.21, $v = \mu_K = \mu$. $\square$

Remarque 5.5. L'hypothèse d'énergie finie ne peut pas être supprimée : pour $f(z) = z^d$, la masse de Dirac δ_0 vérifie $f^*\delta_0 = d\delta_0$ et n'est pas μ . Plus généralement, si a est un point exceptionnel fixe, δ_a est équilibrée. On peut montrer que ce sont les seules exceptions : toute mesure équilibrée sans atome est égale à μ ([12], §6.5).

5.3. Le théorème de Brolin. Nous en venons à l'énoncé le plus important du cours. Pour $a \in \mathbf{C}$, notons

$$\mathbf{v}_n^{(a)} = \frac{1}{d^n} (f^n)^* \delta_a = \frac{1}{d^n} \sum_{f^n(b)=a} \deg_b(f^n) \delta_b \quad (92)$$

la mesure de comptage normalisée des préimages d'ordre n de a , comptées avec multiplicité. Son potentiel est, d'après (80),

$$u_n^{(a)} := p_{\mathbf{v}_n^{(a)}} = \frac{1}{d^n} \log |f^n - a|. \quad (93)$$

Lemme 5.6. Posons $M_a = \sup_{z \in \mathbf{C}} (\log |z - a| - G(z))$. Alors $M_a < \infty$, la fonction $a \mapsto M_a$ est bornée sur tout compact, et

$$u_n^{(a)} \leq G + \frac{M_a}{d^n} \quad \text{sur } \mathbf{C}. \quad (94)$$

De plus $u_n^{(a)} \rightarrow G$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{C} \setminus K$.

Démonstration. La fonction $z \mapsto \log |z - a| - G(z)$ est s.c.s. sur $\mathbf{C}$ et tend vers 0 à l'infini, donc est majorée ; la majoration est uniforme pour a dans un compact puisque $\log |z - a| \leq \log(|z| + |a|)$. Comme $u_0^{(a)} = \log |z - a|$, la relation de contraction (89) donne

$$u_n^{(a)} - G = \frac{1}{d^n} (\log |\cdot - a| - G) \circ f^n \leq \frac{M_a}{d^n}. \quad (95)$$

Enfin, sur un compact de $\mathbf{C} \setminus K$ on a $f^n \rightarrow \infty$ uniformément, donc $u_n^{(a)} = d^{-n} \log |f^n| + d^{-n} \log |1 - a/f^n|$ où le second terme tend uniformément vers 0, et le premier vers G . $\square$

L'inégalité (94) est *unilatérale*, et il n'y a aucun espoir de la renverser en général : si $f^n(z)$ tombe très près de a , alors $u_n^{(a)}(z)$ est très négatif. C'est exactement le phénomène qui produit les points exceptionnels.

Théorème 5.7 (Brolin, version presque partout). Pour Lebesgue-presque tout $a \in \mathbf{C}$, on a $\mathbf{v}_n^{(a)} \rightarrow \mu$ faiblement.

Démonstration. Fixons $c \in \mathbf{C}$, $r > 0$, et notons σ la mesure uniforme sur le cercle $\partial \mathbb{D}(c, r)$. Par le théorème 5.2,

$$\|p_{T^n \sigma} - G\|_\infty \leq \frac{A}{d^n}, \quad A = \|p_\sigma - G\|_\infty < \infty. \quad (96)$$

Par ailleurs $(f^n)^*\sigma = \int (f^n)^*\delta_a d\sigma(a)$, donc $T^n\sigma = \int v_n^{(a)} d\sigma(a)$ et, par Fubini,

$$p_{T^n\sigma}(z) = \int p_{v_n^{(a)}}(z) d\sigma(a) = \int u_n^{(a)}(z) d\sigma(a). \quad (97)$$

Soit $M = \sup \{M_a \mid a \in \partial\mathbb{D}(c, r)\} < \infty$ et posons

$$\Phi_n(a, z) = G(z) + Md^{-n} - u_n^{(a)}(z) \geq 0, \quad (98)$$

la positivité venant de (94). En intégrant (97) et en utilisant (96), il vient $\int \Phi_n(a, z) d\sigma(a) \leq (M + A)d^{-n}$ pour tout z . Fixons un compact $L \subset \mathbb{C}$ et posons $\Psi_n(a) = \int_L \Phi_n(a, z) d\text{Leb}(z) \geq 0$. Le théorème de Tonelli donne

$$\int \Psi_n(a) d\sigma(a) \leq (M + A) \text{Leb}(L) d^{-n}. \quad (99)$$

Par l'inégalité de Markov (lemme A.25), $\sigma\left(\left\{\Psi_n > d^{-n/2}\right\}\right) \leq (M + A) \text{Leb}(L) d^{-n/2}$, série convergente; le lemme A.25 montre donc que pour σ -presque tout a on a $\Psi_n(a) \leq d^{-n/2}$ pour n assez grand, donc $\Psi_n(a) \rightarrow 0$. Comme $G + Md^{-n} - u_n^{(a)} \geq 0$, ceci signifie exactement que $u_n^{(a)} \rightarrow G$ dans $L^1(L)$. En prenant une exhaustion L_k de $\mathbb{C}$ par des compacts et en intersectant les ensembles de mesure pleine correspondants, on obtient : pour σ -presque tout $a \in \partial\mathbb{D}(c, r)$, $u_n^{(a)} \rightarrow G$ dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$, donc $v_n^{(a)} \rightarrow \mu$ par le théorème 3.14. Ceci vaut pour tout $r > 0$; en intégrant en coordonnées polaires autour de c , l'ensemble des $a \in \mathbb{C}$ pour lesquels la conclusion échoue est de mesure de Lebesgue nulle. $\square$

Théorème 5.8 (Brolin). *Pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus E_f$, on a $v_n^{(a)} \rightarrow \mu$ faiblement. En particulier $\text{Supp } \mu = \mathcal{J}$ est l'ensemble des points d'accumulation de l'orbite arrière de tout point non exceptionnel.*

Nous admettons le passage de la version presque partout à la version optimale, qui demande une analyse fine du comportement de f^{-n} au voisinage de a ; voir [5], ou [12], §6.5, ou encore [3], chapitre 1. Signalons que l'hypothèse $a \notin E_f$ est nécessaire : pour $f(z) = z^d$ et $a = 0$, on a $v_n^{(0)} = \delta_0$ pour tout n , alors que μ est la mesure de Lebesgue du cercle. Le théorème 5.8 raffine considérablement le théorème 2.11 : non seulement l'orbite arrière de a s'accumule sur tout $\mathcal{J}$, mais elle s'y répartit selon une loi précise, la même pour tous les a .

Corollaire 5.9. *La mesure μ ne dépend que de la dynamique de f : si ϕ est une homographie et $g = \phi f \phi^{-1}$ un polynôme, alors $\mu_g = \phi_* \mu_f$.*

Démonstration. Les mesures $v_n^{(a)}$ se transportent par ϕ , et l'ensemble $E_g = \phi(E_f)$. On applique le théorème 5.8 des deux côtés. $\square$

5.4. Équidistribution des points périodiques. Les points périodiques de période divisant n sont les racines du polynôme unitaire $f^n(z) - z$, de degré d^n . Posons

$$\pi_n = \frac{1}{d^n} \sum_{f^n(z)=z} \text{mult}_z \delta_z, \quad p_{\pi_n}(z) = \frac{1}{d^n} \log |f^n(z) - z|. \quad (100)$$

Proposition 5.10. *Pour tout compact L il existe $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tel que $p_{\pi_n} \leq G + \varepsilon_n$ sur L , et $p_{\pi_n} \rightarrow G$ uniformément sur tout compact de $\mathbf{C} \setminus K$. Par conséquent, toute valeur d'adhérence v de (p_{π_n}) dans L_{loc}^1 est sous-harmonique, vérifie $v \leq G$ sur $\mathbf{C}$ et $v = G$ sur $\mathbf{C} \setminus K$; et toute valeur d'adhérence faible de (π_n) est portée par K et coïncide avec μ hors de K .*

Démonstration. Tous les points périodiques sont dans $K \subset \overline{\mathbb{D}}(0, R)$, donc $\text{Supp } \pi_n \subset K$. Sur un compact $L \subset \overline{\mathbb{D}}(0, R')$ on a $|f^n(z) - z| \leq |f^n(z)| + R'$, d'où

$$p_{\pi_n} \leq \frac{1}{d^n} \log^+ |f^n| + \frac{\log(1 + R')}{d^n}, \quad (101)$$

dont le membre de droite converge uniformément vers G par le théorème 4.2. Sur un compact de $\mathbf{C} \setminus K$, $f^n \rightarrow \infty$ uniformément et $p_{\pi_n} = d^{-n} \log |f^n| + d^{-n} \log |1 - z/f^n| \rightarrow G$. Le reste résulte du théorème 3.14. $\square$

Notons qu'il ne peut pas y avoir convergence uniforme sur K : la fonction p_{π_n} vaut $-\infty$ en chaque point périodique. C'est le même phénomène unilatéral que pour (94), et c'est lui qui rend ces théorèmes délicats. Lorsque K est de mesure nulle, cette difficulté disparaît.

Corollaire 5.11. *Supposons $\text{Leb}(K) = 0$. Alors $\pi_n \rightarrow \mu$, et $v_n^{(a)} \rightarrow \mu$ pour tout $a \in \mathbf{C}$.*

Démonstration. Traitons le cas de $(v_n^{(a)})$, celui de (π_n) étant identique. D'après le lemme 5.6, $u_n^{(a)} \rightarrow G$ en tout point de $\mathbf{C} \setminus K$, donc Lebesgue-presque partout, et la famille est uniformément majorée sur les compacts. Soit v une valeur d'adhérence de $(u_n^{(a)})$ dans L_{loc}^1 , obtenue le long d'une sous-suite; quitte à extraire encore, la convergence a lieu presque partout, donc $v = G$ presque partout. Toutes les valeurs d'adhérence coïncidant avec G , on a $u_n^{(a)} \rightarrow G$ dans L_{loc}^1 et l'on conclut par le théorème 3.14. $\square$

Théorème 5.12 (Équidistribution des points périodiques). *On a $\pi_n \rightarrow \mu$ faiblement. Il en va de même de la mesure de comptage normalisée des points périodiques répulsifs de période n .*

Ce théorème, dû à Tortrat et, dans le cadre des fractions rationnelles, à Lyubich, se démontre en contrôlant les zéros de $f^n(z) - z$ situés dans $\text{Int } K$: on montre qu'ils sont en nombre $o(d^n)$, ce qui suffit d'après la proposition 5.10. Voir [10] ou [3], chapitre 2. La seconde assertion résulte de ce que les points périodiques non répulsifs sont en nombre $O(1)$ par cycle et donc négligeables devant d^n .

5.5. Exercices.

Exercice 5.13. Pour $f(z) = z^d$, calculer explicitement $\nu_n^{(a)}$ pour $a \neq 0$ et vérifier directement le théorème 5.8. Que se passe-t-il pour $a = 0$?

Exercice 5.14. Montrer que pour $f(z) = z^2 + c$ avec $|c|$ grand, $\text{Leb}(K_f) = 0$, et en déduire directement, par le corollaire 5.11, l'équidistribution des préimages et des points périodiques. Montrer sur l'exemple $f(z) = z^d$ que l'hypothèse $\text{Leb}(K) = 0$ n'est pas superflue.

Exercice 5.15. Soit g un polynôme fixé de degré $k \geq 0$. Montrer que les solutions de $f^n(z) = g(z)$ s'équidistribuent vers μ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 5.16. Dédurre du théorème 5.2 une estimation de la vitesse : pour ϕ de classe C^2 à support compact, $|\int \phi d(T^n \sigma) - \int \phi d\mu| \leq C_\phi d^{-n}$.

Exercice 5.17. Soit L un compact non polaire tel que $J \subset L$. Montrer que $\text{cap}(f^{-n}(L))^{d^n} \rightarrow$ une limite que l'on identifiera, et retrouver (76).

Exercice 5.18. Montrer, à l'aide de l'exercice 3.30, que les points de Fekete de $J(f)$ s'équidistribuent vers μ .

6. ENTROPIE, EXPOSANTS DE LYAPUNOV ET FRACTIONS RATIONNELLES

Ce dernier chapitre a deux objectifs. Le premier est d'expliquer en quel sens μ_f est la mesure naturelle du système $(J(f), f)$: c'est l'unique mesure invariante qui maximise l'entropie, et son exposant de Lyapunov se calcule explicitement en fonction des points critiques. Le second est d'indiquer comment toute la construction s'étend aux fractions rationnelles, où le potentiel logarithmique du plan doit être remplacé par un potentiel homogène sur $\mathbf{C}^2$.

6.1. Mélange. Rappelons que si ν est une mesure de probabilité invariante par f , le système (f, ν) est *mélangeant* si pour toutes fonctions $\phi, \psi \in L^2(\nu)$,

$$\int (\phi \circ f^n) \psi d\nu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \phi d\nu \int \psi d\nu, \quad (102)$$

ce qui entraîne l'ergodicité. L'outil est l'opérateur de transfert

$$\Lambda \psi(z) = \frac{1}{d} \sum_{f(w)=z} \deg_w f \cdot \psi(w), \quad (103)$$

qui envoie fonctions continues sur fonctions continues et vérifie $\Lambda^n \psi(z) = \int \psi d\nu_n^{(z)}$ avec les notations (92).

Théorème 6.1. *Le système (f, μ_f) est mélangeant ; en particulier il est ergodique.*

Démonstration. L'égalité $f^*\mu = d\mu$ se réécrit $\int g d\mu = \int \Lambda g d\mu$ pour toute g continue. En l'appliquant à $g = \psi \cdot (\varphi \circ f)$ et en observant que $\Lambda(\psi \cdot (\varphi \circ f)) = \varphi \cdot \Lambda\psi$, il vient

$$\int (\varphi \circ f) \psi d\mu = \int \varphi \Lambda\psi d\mu, \quad (104)$$

puis par récurrence $\int (\varphi \circ f^n) \psi d\mu = \int \varphi \Lambda^n \psi d\mu$. Or $\Lambda^n \psi(z) = \int \psi dv_n^{(z)} \rightarrow \int \psi d\mu$ pour tout $z \notin E_f$ par le théorème 5.8, et $\mu(E_f) = 0$ puisque $E_f \subset \mathcal{F}(f)$ tandis que $\text{Supp} \mu = \mathcal{J}(f)$. Comme $|\Lambda^n \psi| \leq \|\psi\|_\infty$, le théorème de convergence dominée donne

$$\int (\varphi \circ f^n) \psi d\mu \longrightarrow \int \varphi d\mu \int \psi d\mu \quad (105)$$

pour φ, ψ continues, donc pour $\varphi, \psi \in L^2(\mu)$ par densité. $\square$

6.2. Entropie. Rappelons brièvement les deux notions d'entropie. L'*entropie topologique* $h_{\text{top}}(f)$ mesure le taux de croissance exponentiel du nombre d'orbites de longueur n distinguables à ε près : si $N(n, \varepsilon)$ est le cardinal minimal d'un ensemble (n, ε) -couvrant pour la distance $\sigma_n(z, w) = \max_{0 \leq j < n} \sigma(f^j z, f^j w)$, alors

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(n, \varepsilon). \quad (106)$$

L'*entropie métrique* $h_v(f)$ d'une mesure invariante v est l'entropie de Kolmogorov–Sinai, définie à partir des partitions mesurables. Le *principe variationnel*, que nous admettons, affirme que

$$h_{\text{top}}(f) = \sup \{h_v(f) \mid v \text{ mesure de probabilité invariante}\}. \quad (107)$$

Une mesure réalisant ce supremum est dite *d'entropie maximale*.

Théorème 6.2 (Gromov, Misiurewicz–Przytycki, Lyubich, Freire–Lopes–Mañé). *Soit f rationnelle de degré $d \geq 2$. Alors $h_{\text{top}}(f) = \log d$, la mesure μ_f vérifie $h_{\mu_f}(f) = \log d$, et c'est l'unique mesure de probabilité invariante d'entropie maximale.*

Nous admettons ce théorème ; voir [10], [7] et [8]. Donnons-en toutefois l'idée. La majoration $h_{\text{top}}(f) \leq \log d$ est un argument de Gromov : le graphe des n premières itérées est une courbe algébrique de $(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))^n$ dont le volume croît comme d^n , ce qui borne le nombre d'orbites ε -distinguables. La minoration $h_{\text{top}}(f) \geq \log d$ est due à Misiurewicz et Przytycki et repose sur le fait que le degré topologique est un minorant de l'entropie. Enfin $h_{\mu_f} = \log d$ traduit exactement l'équation $f^*\mu_f = d\mu_f$: les d^n branches inverses de f^n portent chacune une masse d^{-n} , de sorte que la partition dynamique se raffine à vitesse d^n , et l'unicité provient de ce que toute mesure d'entropie $\log d$ doit répartir sa masse de façon équilibrée entre les branches inverses, donc être équilibrée, donc être μ_f par le théorème 5.4.

6.3. Exposant de Lyapunov et formule de Manning.

Définition 6.3. L'exposant de Lyapunov de $\mu = \mu_f$ est

$$\chi_\mu = \int \log |f'| d\mu. \quad (108)$$

Cette intégrale est bien définie et finie : $\log |f'|$ est une somme de fonctions $\log |z - c|$, dont les intégrales contre μ valent $G(c)$, finies. Par le théorème ergodique de Birkhoff et le théorème 6.1, $\frac{1}{n} \log |(f^n)'(z)| \rightarrow \chi_\mu$ pour μ -presque tout z : c'est le taux d'expansion moyen de f le long des orbites typiques.

Théorème 6.4 (Formule de Manning). *Soit f un polynôme unitaire de degré $d \geq 2$ et $c_1, \dots, c_{d-1}$ ses points critiques dans $\mathbf{C}$, répétés selon leur multiplicité. Alors*

$$\chi_\mu = \log d + \sum_{i=1}^{d-1} G_f(c_i). \quad (109)$$

Démonstration. Le polynôme f' est de degré $d - 1$ et de coefficient dominant d , donc $f'(z) = d \prod_{i=1}^{d-1} (z - c_i)$. En intégrant $\log |f'|$ contre μ et en utilisant $p_\mu = G_f$ (identité (78), valable car f est unitaire), il vient

$$\chi_\mu = \log d + \sum_{i=1}^{d-1} \int \log |z - c_i| d\mu(z) = \log d + \sum_{i=1}^{d-1} G_f(c_i). \quad (110) \quad \square$$

Cette formule, d'une simplicité remarquable, dit que l'expansion moyenne sur l'ensemble de Julia est *minimale* exactement quand aucun point critique ne s'échappe.

Corollaire 6.5. *On a $\chi_\mu \geq \log d > 0$, avec égalité si et seulement si tous les points critiques de f appartiennent à K_f , c'est-à-dire si et seulement si K_f est connexe. En particulier μ est une mesure hyperbolique et*

$$\dim_H(\mu) = \frac{h_\mu}{\chi_\mu} = \frac{\log d}{\chi_\mu} \leq 1, \quad (111)$$

avec égalité si et seulement si $\mathcal{J}(f)$ est un cercle ou un segment.

La formule de dimension (111) est le théorème de Mañé, version pour les applications rationnelles de la formule de Ledrappier–Young ; l'égalité $\dim_H \mu = 1$ force $\mathcal{J}(f)$ à être analytique par un théorème de Zdunik. Signalons enfin que $\chi_\nu \geq \frac{1}{2} \log d$ pour toute mesure invariante d'entropie maximale, ce qui découle ici de l'inégalité de Ruelle $h_\nu \leq 2\chi_\nu$; le théorème 6.4 donne beaucoup mieux dans le cas polynomial.

6.4. Le cas des fractions rationnelles. Soit maintenant f une fraction rationnelle de degré $d \geq 2$. La construction du chapitre 4 utilisait de façon essentielle le point fixe ∞ ; pour s'en passer, on relève f à $\mathbf{C}^2$.

Écrivons $f = [P : Q]$ en coordonnées homogènes, où P, Q sont des polynômes homogènes de degré d sans facteur commun, et posons

$$F = (P, Q) : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2, \quad \pi : \mathbf{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \quad (112)$$

la projection canonique, de sorte que $\pi \circ F = f \circ \pi$. La condition « sans facteur commun » équivaut à $\text{Res}(P, Q) \neq 0$ et garantit $F^{-1}(0) = \{0\}$, donc l'existence de $C > 0$ telle que

$$C^{-1} \|v\|^d \leq \|F(v)\| \leq C \|v\|^d \quad (v \in \mathbf{C}^2). \quad (113)$$

Théorème 6.6. *La suite $d^{-n} \log \|F^n\|$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbf{C}^2 \setminus \{0\}$ vers une fonction continue G_F vérifiant*

$$G_F \circ F = d G_F, \quad G_F(\lambda v) = \log |\lambda| + G_F(v), \quad |G_F(v) - \log \|v\|| \leq \frac{\log C}{d-1}. \quad (114)$$

La fonction $g(z) = G_F(z, 1)$ est sous-harmonique sur $\mathbf{C}$ et la mesure

$$\mu_f = \frac{1}{2\pi} \Delta g \quad (115)$$

est une mesure de probabilité sur $\mathbf{C} \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, indépendante du choix des coordonnées homogènes, sans atome, de support $\mathcal{J}(f)$, et vérifiant $f^* \mu_f = d \mu_f$.

La démonstration est mot pour mot celle du théorème 4.2, l'estimée (113) remplaçant le lemme 4.1 ; l'homogénéité $G_F(\lambda v) = \log |\lambda| + G_F(v)$ résulte de $F(\lambda v) = \lambda^d F(v)$. Lorsque f est un polynôme, $F(x, y) = (y^d f(x/y), y^d)$ et l'on retrouve $g = G_f$.

Tous les énoncés des chapitres 5 et 6 restent valables, avec les mêmes démonstrations une fois les potentiels remplacés par leurs analogues homogènes.

Théorème 6.7 (Freire–Lopes–Mañé, Lyubich). *Soit f rationnelle de degré $d \geq 2$ et μ_f comme ci-dessus.*

- (1) μ_f est l'unique mesure de probabilité sans atome vérifiant $f^* \mu_f = d \mu_f$.
- (2) Pour tout $a \in \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus E_f$, $d^{-n} (f^n)^* \delta_a \rightarrow \mu_f$; l'ensemble exceptionnel E_f contient au plus deux points.
- (3) Les points périodiques répulsifs de période n s'équidistribuent vers μ_f .
- (4) (f, μ_f) est mélangeant, d'entropie $\log d = h_{\text{top}}(f)$, et c'est l'unique mesure d'entropie maximale.

Remarque 6.8. Ce schéma — construire une fonction de Green par une limite $d^{-n} \log \|F^n\|$, en prendre le laplacien, montrer que la mesure obtenue est équilibrée et qu'elle est l'unique telle mesure — est robuste. Il s'étend aux endomorphismes de $\mathbf{P}^k$ (Fornæss–Sibony), aux applications de Hénon

du plan complexe (Bedford–Smillie), et, en remplaçant $\mathbf{C}$ par un corps ultramétrique et le plan par l'espace de Berkovich, à la dynamique arithmétique (Baker–Rumely, Chambert-Loir, Favre–Rivera-Letelier). Dans tous ces cadres, la théorie du potentiel joue exactement le rôle qu'elle joue ici.

6.5. Exercices.

Exercice 6.9. Pour $f(z) = z^d$, vérifier directement que $h_{\mu_f} = \log d$ et $\chi_{\mu_f} = \log d$, puis $\dim_H \mu_f = 1$.

Exercice 6.10. Soit $f(z) = z^2 + c$. Exprimer χ_{μ_f} en fonction de $G_f(0)$ et en déduire que $c \mapsto \chi_{\mu_f}$ est continue sur $\mathbf{C}$, harmonique hors de l'ensemble de Mandelbrot, et minimale exactement sur celui-ci.

Exercice 6.11. Montrer que l'opérateur Λ de (103) envoie fonctions continues sur fonctions continues, et que $\Lambda 1 = 1$. En déduire que μ_f est l'unique mesure de probabilité ν telle que $\int \Lambda \psi d\nu = \int \psi d\nu$ pour toute ψ continue, parmi celles sans atome.

Exercice 6.12. Montrer, à partir du théorème 6.1, que μ_f est ergodique, puis que μ_f -presque toute orbite est dense dans $J(f)$.

Exercice 6.13. Vérifier (113) à partir de $\text{Res}(P, Q) \neq 0$, et démontrer le théorème 6.6 en suivant la démonstration du théorème 4.2.

Exercice 6.14. Calculer χ_μ pour le polynôme de Tchebychev T_d de l'exercice 4.16 et vérifier la formule de Manning. Que vaut $\dim_H \mu$?

ANNEXE A. RAPPELS D'ANALYSE COMPLEXE ET D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Ce chapitre ne contient aucun résultat nouveau : il rassemble, avec des énoncés précis et des références, les théorèmes d'analyse dont nous nous servirons constamment. Le lecteur qui les connaît peut passer directement au chapitre 1 et revenir ici à l'occasion. Il vaut cependant la peine de remarquer dès maintenant que trois énoncés seulement portent l'essentiel du poids de la théorie. Le premier est le *principe du maximum*, sous ses diverses formes, qui est le mécanisme par lequel une information au bord contrôle une fonction à l'intérieur. Le deuxième est le *théorème d'Ascoli*, qui transforme une majoration uniforme en une propriété de compacité : c'est lui qui, combiné aux estimées de Cauchy, donnera les familles normales, et donc la définition même de l'ensemble de Fatou. Le troisième est le *théorème de Banach–Alaoglu* sous sa forme concrète — de toute suite de mesures de probabilité sur un compact on peut extraire une sous-suite faiblement convergente — qui joue exactement le même rôle du côté de la théorie de la mesure, et permet au chapitre 5 de parler de « la » limite d'une suite de mesures de comptage. Les trois sont des énoncés de compacité, et toute la dynamique holomorphe pourrait se décrire comme l'art de les appliquer au bon endroit.

Sauf mention contraire, U désigne un ouvert de $\mathbf{C}$ et $O(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U . Les démonstrations omises se trouvent dans [13] et [1] pour la partie complexe, dans [13] et [4] pour la partie fonctionnelle.

A.1. Fonctions holomorphes.

Théorème A.1 (Cauchy). *Soit $f \in O(U)$ et $\overline{\mathbb{D}}(a, r) \subset U$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{D}(a, r)$,*

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathbb{D}(a, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (116)$$

En particulier f est analytique, indéfiniment dérivable, et ses dérivées vérifient les estimées de Cauchy

$$\left| f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{k!}{r^k} \sup_{\partial \mathbb{D}(a, r)} |f|. \quad (117)$$

Le cas $k = 1$ de (117) est celui que nous utiliserons : il dit qu'une famille de fonctions holomorphes uniformément bornée est automatiquement uniformément lipschitzienne sur les compacts. C'est le pont entre « borné » et « équicontinu », donc entre l'analyse complexe et le théorème d'Ascoli.

Corollaire A.2 (Liouville). *Toute fonction entière bornée est constante. Plus généralement, si f est entière et $|f(z)| = O(|z|^k)$ à l'infini, alors f est un polynôme de degré au plus k .*

Théorème A.3 (Principe du maximum). *Soit $f \in O(U)$ avec U connexe.*

- (1) *Si $|f|$ admet un maximum local en un point de U , alors f est constante.*
- (2) *Si U est borné et si f se prolonge continûment à $\overline{U}$, alors $\max_{\overline{U}} |f| = \max_{\partial U} |f|$.*

Théorème A.4 (Application ouverte, zéros isolés). *Soit $f \in O(U)$ non constante, U connexe. Alors f est une application ouverte, et ses zéros sont isolés. En particulier, si f et g sont holomorphes sur U connexe et coïncident sur un ensemble ayant un point d'accumulation dans U , alors $f = g$.*

Théorème A.5 (Weierstrass). *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur U convergeant uniformément sur tout compact de U vers une fonction f . Alors f est holomorphe et, pour tout k , $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ uniformément sur tout compact.*

Ce théorème n'a pas d'analogue réel, et c'est lui qui rend la notion de famille normale si puissante : une limite de fonctions holomorphes est holomorphe, sans hypothèse supplémentaire.

Théorème A.6 (Singularité effaçable, Riemann). *Soit f holomorphe et bornée sur $\mathbb{D}(a, r) \setminus \{a\}$. Alors f se prolonge holomorphiquement à $\mathbb{D}(a, r)$.*

Rappelons enfin qu'une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}(a, r) \setminus \{a\}$ admet un développement de Laurent $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - a)^k$, et que la singularité est effaçable, un pôle, ou essentielle selon que $c_k = 0$ pour $k < 0$, pour $k < -m$ avec $c_{-m} \neq 0$, ou pour aucun rang. Une application *méromorphe* sur U est une application holomorphe $U \rightarrow \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ non identiquement égale à ∞ sur une composante connexe.

Théorème A.7 (Casorati–Weierstrass ; Picard). *Soit a une singularité essentielle de f . Alors l'image de tout voisinage épointé de a est dense dans $\mathbb{C}$; mieux, elle est égale à $\mathbb{C}$ privé d'au plus un point (grand théorème de Picard).*

Nous n'utiliserons pas le théorème de Picard, mais il est utile de le garder à l'esprit : le grand théorème de Montel (théorème 1.16) en est la version « en famille », et le nombre 2 de valeurs omises y joue le même rôle.

A.2. Zéros, indice et théorème de Rouché.

Théorème A.8 (Principe de l'argument). *Soit f méromorphe sur U , et γ un lacet homotope à un point dans U , ne rencontrant ni les zéros ni les pôles de f . Alors*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_a \text{Ind}(\gamma, a) \text{ord}_a(f), \quad (118)$$

où $\text{ord}_a(f)$ est l'ordre d'annulation de f en a (négatif en un pôle) et $\text{Ind}(\gamma, a)$ l'indice de γ autour de a .

Théorème A.9 (Rouché). *Soient f, g holomorphes sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}(a, r)$ telles que $|f - g| < |f|$ sur $\partial\mathbb{D}(a, r)$. Alors f et g ont le même nombre de zéros dans $\mathbb{D}(a, r)$, comptés avec multiplicité.*

Ce théorème est notre outil de comptage : il dit que le nombre de solutions d'une équation holomorphe est stable par petite perturbation, et c'est sous cette forme que nous établirons la continuité du degré (lemme 1.18).

Proposition A.10 (Forme locale). *Soit f holomorphe au voisinage de a , non constante, et $k \geq 1$ l'ordre d'annulation de $f - f(a)$ en a . Alors il existe un biholomorphisme ϕ d'un voisinage de a sur un voisinage de 0, avec $\phi(a) = 0$, tel que*

$$f(z) = f(a) + \phi(z)^k. \quad (119)$$

En particulier f est de degré topologique k au voisinage de a , au-dessus de tout point $\neq f(a)$ assez proche de $f(a)$.

Corollaire A.11. *Une application holomorphe injective est un biholomorphisme sur son image, et sa dérivée ne s'annule pas.*

Théorème A.12 (Hurwitz). *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur U connexe, convergeant uniformément sur tout compact vers f . Si aucune f_n ne s'annule, alors f ne s'annule pas ou $f \equiv 0$. Si toutes les f_n sont injectives, alors f est injective ou constante.*

A.3. Le lemme de Schwarz et la métrique de Poincaré.

Lemme A.13 (Schwarz). *Soit $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorphe avec $f(0) = 0$. Alors $|f(z)| \leq |z|$ pour tout z et $|f'(0)| \leq 1$. Si l'une de ces inégalités est une égalité en un point, alors f est une rotation.*

Les automorphismes du disque sont exactement les applications

$$z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad \theta \in \mathbf{R}, a \in \mathbb{D}, \quad (120)$$

et le groupe qu'ils forment agit transitivement sur $\mathbb{D}$. Ceci permet de définir la *métrique de Poincaré*

$$\rho_{\mathbb{D}}(z) |dz| = \frac{2 |dz|}{1 - |z|^2}, \quad (121)$$

invariante par (120), complète, et de courbure constante -1 .

Théorème A.14 (Schwarz–Pick). *Toute application holomorphe $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est 1-lipschitzienne pour la distance de Poincaré, et c'est une isométrie si et seulement si f est un automorphisme.*

Théorème A.15 (Uniformisation). *Toute surface de Riemann simplement connexe est biholomorphe à $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, à $\mathbf{C}$ ou à $\mathbb{D}$. Par conséquent, si X est une surface de Riemann dont le revêtement universel est $\mathbb{D}$ — ce qui est le cas dès que X est un ouvert de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dont le complémentaire contient au moins trois points — alors X hérite d'une métrique complète ρ_X , dite hyperbolique, pour laquelle toute application holomorphe $X \rightarrow Y$ entre deux telles surfaces est 1-lipschitzienne.*

C'est exactement cet énoncé qui produit le grand théorème de Montel : une famille d'applications à valeurs dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ est uniformément lipschitzienne pour les métriques hyperboliques, donc équicontinue, donc normale par le théorème A.17. Voir [11], §2–3, pour une exposition complète.

A.4. Convergence uniforme sur les compacts et théorème d'Ascoli. Soit $U \subset \mathbf{C}$ ouvert et (X, δ) un espace métrique. On munit l'ensemble $\mathcal{C}(U, X)$ des applications continues de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. En choisissant une exhaustion $K_1 \subset K_2 \subset \dots$ de U par des compacts, cette topologie est induite par la distance

$$D(f, g) = \sum_{j \geq 1} 2^{-j} \min \left(1, \sup_{K_j} \delta(f, g) \right), \quad (122)$$

qui est complète dès que X l'est.

Définition A.16. Une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(U, X)$ est *équicontinue en $a \in U$* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que

$$|z - a| < \eta \implies \delta(f(z), f(a)) < \varepsilon \quad \text{pour toute } f \in \mathcal{F}. \quad (123)$$

Elle est équicontinue si elle l'est en tout point.

Le point essentiel est que η ne dépend pas de f : c'est une condition uniforme *en famille*, et c'est elle qui exprimera la stabilité dynamique.

Théorème A.17 (Ascoli–Arzelà). *Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(U, X)$ avec (X, δ) métrique complet. Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(U, X)$ si et seulement si :*

- (1) $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point de U ;
- (2) pour tout $z \in U$, l'ensemble $\{f(z) \mid f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans X .

Comme $C(U, X)$ est métrisable, la compacité relative équivaut à la possibilité d'extraire de toute suite de $\mathcal{F}$ une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact de U .

Remarque A.18. Lorsque $X = \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ muni de la distance sphérique, X est compact et la condition (2) est automatiquement vérifiée. Le théorème d'Ascoli se réduit alors à l'équivalence

$$\mathcal{F} \text{ normale} \iff \mathcal{F} \text{ équicontinue}, \quad (124)$$

qui sera notre définition de travail au chapitre 2 : l'ensemble de Fatou est à la fois l'ouvert de normalité et l'ouvert d'équicontinuité. Il est utile de retenir les deux points de vue, car le premier se prête aux arguments d'extraction et le second aux estimations.

Corollaire A.19. Soit $\mathcal{F} \subset O(U)$ uniformément bornée sur tout compact de U . Alors de toute suite de $\mathcal{F}$ on peut extraire une sous-suite convergeant uniformément sur tout compact vers une fonction holomorphe.

Démonstration. Soit $K \subset U$ compact et $r > 0$ tel que $K_r = \{z \mid \text{dist}(z, K) \leq r\} \subset U$. Si $M = \sup_{\mathcal{F}} \sup_{K_r} |f|$, l'estimée (117) donne $|f'| \leq M/r$ sur K , donc toutes les $f \in \mathcal{F}$ sont M/r -lipschitziennes sur K : la famille est équicontinue. Le théorème A.17 fournit l'extraction, et le théorème A.5 l'holomorphicité de la limite. $\square$

A.5. Mesures, dualité et convergence faible. Soit X un espace métrique localement compact séparable — pour nous, $\mathbf{C}$ ou $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ ou un compact de $\mathbf{C}$. On note $C_c(X)$ l'espace des fonctions continues à support compact et $\mathcal{M}(X)$ l'espace des mesures de Radon complexes.

Théorème A.20 (Riesz–Markov). Toute forme linéaire positive L sur $C_c(X)$ s'écrit de façon unique $L(\varphi) = \int \varphi d\mu$ pour une mesure borélienne positive μ , finie sur les compacts et régulière.

Définition A.21. Une suite (μ_n) de mesures positives sur X converge faiblement vers μ , ce que l'on note $\mu_n \rightarrow \mu$, si

$$\int \varphi d\mu_n \longrightarrow \int \varphi d\mu \quad \text{pour toute } \varphi \in C_c(X). \quad (125)$$

Théorème A.22 (Banach–Alaoglu). Soit K un compact métrique. L'ensemble des mesures de probabilité sur K , muni de la topologie faible, est compact et métrisable. En particulier, de toute suite de mesures de probabilité portées par un même compact on peut extraire une sous-suite faiblement convergente, dont la limite est encore une mesure de probabilité.

C'est sous cette forme, et presque uniquement sous cette forme, que nous utiliserons l'analyse fonctionnelle : elle garantit l'existence de valeurs d'adhérence, à charge pour la théorie du potentiel de montrer qu'il n'y en a qu'une. Signalons que l'hypothèse de compacité du support est indispensable : la masse peut fuir à l'infini, comme le montre $\mu_n = \delta_n$ sur $\mathbf{C}$.

Proposition A.23 (Critères de convergence). Soit (μ_n) une suite de mesures de probabilité portées par un compact fixe K .

- (1) Si $\int \phi d\mu_n$ converge pour toute ϕ dans une partie dense de $C(K)$, alors (μ_n) converge faiblement.
- (2) (Portmanteau) $\mu_n \rightarrow \mu$ si et seulement si $\limsup \mu_n(F) \leq \mu(F)$ pour tout fermé F , si et seulement si $\liminf \mu_n(V) \geq \mu(V)$ pour tout ouvert V .
- (3) Si $\mu_n \rightarrow \mu$ et si A est un borélien avec $\mu(\partial A) = 0$, alors $\mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$.

Nous aurons également besoin, au chapitre 3, de la notion de laplacien au sens des distributions.

Définition A.24. Soit $u \in L^1_{\text{loc}}(U)$. Son laplacien au sens des distributions est la forme linéaire

$$\phi \longmapsto \langle \Delta u, \phi \rangle = \int_U u \Delta \phi d\text{Leb}, \quad \phi \in C_c^\infty(U). \quad (126)$$

On dit que $\Delta u \geq 0$ si $\langle \Delta u, \phi \rangle \geq 0$ pour toute $\phi \geq 0$.

Le théorème A.20 montre alors que Δu est une mesure positive, ce qui donnera un sens à la mesure de Riesz d'une fonction sous-harmonique. Rappelons enfin le lemme de Weyl : si $\Delta u = 0$ au sens des distributions, alors u coïncide presque partout avec une fonction harmonique, en particulier C^∞ .

Nous utiliserons librement les théorèmes de convergence monotone et dominée, le théorème de Fubini–Tonelli, ainsi que les deux énoncés élémentaires suivants, qui interviendront dans la démonstration du théorème de Brolin.

Lemme A.25 (Markov, Borel–Cantelli). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité.

- (1) Si $\Psi \geq 0$ est mesurable et $t > 0$, alors $\mathbf{P}(\Psi > t) \leq \frac{1}{t} \int \Psi d\mathbf{P}$.
- (2) Si (A_n) sont mesurables avec $\sum_n \mathbf{P}(A_n) < \infty$, alors presque sûrement ω n'appartient qu'à un nombre fini de A_n .

A.6. Exercices.

Exercice A.26. Dédurre des estimées de Cauchy (117) que si $\mathcal{F} \subset O(U)$ est uniformément bornée par M sur $\overline{\mathbb{D}}(a, r) \subset U$, alors toutes les $f \in \mathcal{F}$ sont $\frac{4M}{r}$ -lipschitziennes sur $\overline{\mathbb{D}}(a, r/2)$.

Exercice A.27. Soit f holomorphe sur $\mathbb{D}$, continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, avec $|f| = 1$ sur $\mathbb{T}$ et f non constante. Montrer que f s'annule dans $\mathbb{D}$. (Appliquer le principe du maximum à f et à $1/f$.)

Exercice A.28. Soit f holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}(a, r)$ avec $f(a) = b$ et $f - b$ d'ordre k en a . Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout b' avec $|b' - b| < \varepsilon$, l'équation $f(z) = b'$ a exactement k solutions dans $\mathbb{D}(a, r)$ comptées avec multiplicité. En déduire la proposition A.10.

Exercice A.29. Montrer que la famille $\{z \mapsto z^n \mid n \geq 1\}$ est équicontinue sur $\mathbb{D}$, mais pas sur un voisinage de 1 dans $\mathbb{C}$. Que vaut la limite sur $\mathbb{D}$?

Exercice A.30. Montrer qu'une famille $\mathcal{F} \subset O(U)$ équicontinue en un point a est uniformément bornée au voisinage de a dès qu'elle l'est en a . La réciproque du corollaire A.19 est-elle vraie, c'est-à-dire une famille normale de fonctions holomorphes est-elle toujours localement uniformément bornée?

Exercice A.31. Soit μ_n la mesure uniforme sur les racines n -ièmes de l'unité. Montrer que μ_n converge faiblement vers la mesure de Lebesgue normalisée de $\mathbb{T}$. Montrer que $\mu_n(\mathbb{T}) \rightarrow 0$ bien que chaque μ_n soit atomique : la convergence faible ne préserve aucune propriété de régularité.

Exercice A.32. Donner un exemple de suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{C}$ n'admettant aucune valeur d'adhérence faible qui soit une mesure de probabilité, et expliquer pourquoi cela ne contredit pas le théorème A.22.

RÉFÉRENCES

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3e édition, McGraw-Hill, 1979.
- [2] A. F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Graduate Texts in Mathematics 132, Springer, 1991.
- [3] F. Berteloot, V. Mayer, *Rudiments de dynamique holomorphe*, Cours Spécialisés 7, SMF/EDP Sciences, 2001.
- [4] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Dunod, 2005.
- [5] H. Brolin, *Invariant sets under iteration of rational functions*, Ark. Mat. **6** (1965), 103–144.
- [6] L. Carleson, T. W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Universitext, Springer, 1993.
- [7] A. Freire, A. Lopes, R. Mañé, *An invariant measure for rational maps*, Bol. Soc. Brasil. Mat. **14** (1983), 45–62.
- [8] M. Gromov, *On the entropy of holomorphic maps*, Enseign. Math. **49** (2003), 217–235.
- [9] L. Hörmander, *Notions of Convexity*, Progress in Mathematics 127, Birkhäuser, 1994.
- [10] M. Lyubich, *Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere*, Ergodic Theory Dynam. Systems **3** (1983), 351–385.
- [11] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, 3e édition, Annals of Mathematics Studies 160, Princeton University Press, 2006.
- [12] T. Ransford, *Potential Theory in the Complex Plane*, London Mathematical Society Student Texts 28, Cambridge University Press, 1995.
- [13] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3e édition, McGraw-Hill, 1987.
- [14] E. B. Saff, V. Totik, *Logarithmic Potentials with External Fields*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 316, Springer, 1997.
- [15] N. Sibony, *Dynamique des applications rationnelles de $\mathbb{P}^k$* , dans *Dynamique et géométrie complexes*, Panoramas et Synthèses 8, SMF, 1999, 97–185.