Automorphismes polynomiaux du plan

Séance d'exercices 9

Marc Abboud

21 Novembre 2024

Exercice 1. Soit V le système des cercles dans $\mathbf{P}^2$. C'est à dire $V \subset \mathcal{L}(2\{z=0\})$ donné par

$$V = \left\{ \left(\frac{x}{z} - a \right)^2 + \left(\frac{y}{z} - b \right)^2 + c : a, b, c \in K \right\} \quad (1)$$

Montrer que V a deux points bases si $\text{char } K \neq 2$ et un seul de multiplicité 2 sinon.

Exercice 2. Soit C une courbe projective lisse et $f \in K(C)$. Montrer que f définit un morphisme $f : C \rightarrow \mathbf{P}^1$ et que

$$\text{div}(f) = f^*(0) - f^*(\infty). \quad (2)$$

Exercice 3. Soit $f = \frac{x}{z}$ la fonction rationnelle sur $\mathbf{P}^2$ avec coordonnées homogènes $[x : y : z]$. Soit X l'éclatement de $\mathbf{P}^2$ en un point p de $z = 0$. Donner $\text{div}_X(f)$ selon le point p qu'on a éclaté.

En déduire qu'il existe une surface projective Z qui contient $\mathbf{A}^2$ comme ouvert telle que la fonction régulière x a un zéro le long d'une des composantes de $Z \setminus \mathbf{A}^2$.

Exercice 4. Soit X l'éclatement de $\mathbf{P}^2$ en un point et soit E le diviseur exceptionnel. Montrer que $\ell(E) = 1$.

Exercice 5. On prend $\mathbf{P}^5$ avec les coordonnées $[r : s : u : v : w]$. Soit Q la quadrique lisse dans $\mathbf{P}^5$ d'équation $s^2 - ru = vw$.

1. Montrer que l'ouvert $w \neq 0$ est isomorphe à $\mathbf{A}^3$.
2. Soit $H = \{w = 0\} \subset Q$, H est un cône avec sommet $[0 : 0 : 0 : 1 : 0]$. Soit $p = [1 : 0 : 0 : 0 : 0]$. Montrer que $u = w = 0$ est le plan tangent de H en p .
3. On se place dans la carte affine $r = 1$. Montrer que s, v, w sont des coordonnées locales en p (p est l'origine dans ces coordonnées).

4. En utilisant ces coordonnées locales, montrer que le diviseur $\{u = 0\} \in \text{Div}(Q)$ a multiplicité 2 en p . Montrer que H a multiplicité 1 en p .
5. Donner $\text{div}(\frac{u}{w})$ et également le diviseur après avoir éclaté p .

Exercice 6 (Dur). Soit X_0 une variété affine lisse. Une *complétion* de X_0 est une variété projective lisse X qui possède un ouvert isomorphe à X_0 . On admettra le fait suivant : si X est une complétion de X_0 , alors toutes les composantes irréductibles de $X \setminus X_0$ sont de codimension 1.

1. En utilisant ce fait, montrer que le groupe $K[X_0]^\times / K^\times$ est un groupe libre abélien de rang fini r (penser à l'image de $\text{div} : K[X_0]^\times \rightarrow \text{Div}(X)$).
2. Montrer que $K[X_0]^\times = \{X_0 \rightarrow \mathbf{A}^1 \setminus \{0\}\}$. On note $\mathbb{G}_m = \mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$.
3. Montrer que $K[\mathbb{G}_m^r] = K[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}]$. Donner $K[\mathbb{G}_m^r]^\times$.
4. En déduire qu'un endomorphisme de $\mathbb{G}_m^r$ est de la forme

$$f(x_1, \dots, x_r) = (\alpha_1 x_1^{a_{11}} \cdots x_r^{a_{1r}}, \dots, \alpha_r x_1^{a_{r1}} \cdots x_r^{a_{rr}}) \quad (3)$$

où $a_{ij} \in \mathbf{Z}$. Montrer que f est dominant si et seulement si la matrice $A = (a_{ij})$ est inversible.

5. Montrer que si $\text{rang}(K[X_0]^\times / K^\times) = r$, alors on a un morphisme $\pi : X_0 \rightarrow \mathbb{G}_m^r$.
6. En déduire que si $f : X_0 \rightarrow X_0$ est un endomorphisme, alors il existe un endomorphisme $g : \mathbb{G}_m^r \rightarrow \mathbb{G}_m^r$ tel que

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{f} & X_0 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{G}_m^r & \xrightarrow{g} & \mathbb{G}_m^r. \end{array} \quad (4)$$