Automorphismes polynomiaux du plan

Séance d'exercices 8

Marc Abboud

14 Novembre 2024

Si $\pi : Z \rightarrow X$ est l'éclatement d'une variété X en un point lisse x , on appelle $E = \pi^{-1}(x)$ le *diviseur exceptionnel*.

Exercice 1. Soit C la courbe $y^2 = x^3$. Montrer que C est singulière en l'origine. Montrer que si on éclate l'origine, alors la transformée stricte de C est lisse et tangente au diviseur exceptionnel.

Exercice 2. Soit C la courbe $y^2 = x^2(x + 1)$. Montrer que C est singulière en l'origine. Montrer que si on éclate l'origine, alors la transformée stricte de C est lisse et intersecte le diviseur exceptionnel en deux points distincts.

Exercice 3. Soient C_1, C_2 les courbes d'équation $y = \pm x^2$. Montrer qu'il faut faire deux éclatements pour que les transformées strictes de ces deux courbes ne s'intersectent plus.

Exercice 4. Soit $f : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ donnée par

$$f([x : y : z]) = [xz : xy : z^2] \quad (1)$$

Montrer qu'il faut éclater trois fois pour obtenir un morphisme.

Exercice 5. Soit X une variété et $x \in X$ un point lisse. Soit $\phi \in \mathcal{O}_x$. On définit la *multiplicité* de ϕ en x par

$$m_x(\phi) = \max \left(k \geq 0 : \phi \in \mathfrak{m}_x^k \right). \quad (2)$$

Soit $\pi : Y \rightarrow X$ l'éclatement de X et E le diviseur exceptionnel. Montrer que $\text{ord}_E(\phi) = m_x(\pi^*\phi)$.

Exercice 6. Soit X une variété et $x \in X$ un point lisse. Soit $\phi, \psi \in \mathcal{O}_x$ irréductible telle que $d_x\phi$ n'est pas proportionnelle à $d_x\psi$. Montrer que les transformées strictes des germes de courbes $\phi = 0$ et $\psi = 0$ ne s'intersectent plus dans $\text{Bl}_x(X)$.

Exercice 7. Soit X une variété et x un point lisse. Soit $f \in \text{Aut}(x)$ tel que $f(x) = x$. Montrer que f s'étend en un automorphisme de $\text{Bl}_x(X)$.