Automorphismes polynomiaux du plan

Séance d'exercices 7

Marc Abboud

26 Septembre 2024

Exercice 1. Soit C la courbe définie par $x^2 = y^3$. Donner le lieu singulier de C.

Exercice 2. Soit M_D la surface dans $\mathbf{C}^3$ définie par

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz + D. \tag{1}$$

Décrire $\mathrm{Sing}(M_D)$.

Exercice 3. On définit l'éclatement de $\mathbf{P}^2$ en l'origine comme la variété $X \subset \mathbf{A}^2 \times \mathbf{P}^1$ définie par

$$xv = yu \tag{2}$$

où (x, y) sont les coordonnées homogènes sur $\mathbf{A}^2$ et $[u : v]$ les coordonnées homogènes sur $\mathbf{P}^1$. On le morphisme $\pi : X \to \mathbf{A}^2$ qui est la projection sur le premier facteur. On note $E \subset X$ la courbe $E = (0,0) \times \mathbf{P}^1$.

1. Montrer que $\pi^{-1}(0) = E$.
2. Montrer que π induit un isomorphisme $X \backslash E \simeq X \backslash (0,0)$.
3. Montrer que E est localement donnée par une seule équation.
4. Montrer que X est lisse.

Exercice 4. Soit X une variété de dimension n et $u_1, \dots, u_n \in K[X]$. Montrer que l'ensemble des points x tels que $u_1, \dots, u_n$ s'annulent en x mais n'y sont pas des coordonnées locales est fermé.

Exercice 5. Soit $S \subset \mathbf{A}^2$ le cercle donné par l'équation $x^2 + y^2 = 1$. Montre que x est une coordonnée locale en $(0, 1)$.

Exercice 6. Soit $K[[t]]$ l'anneau des séries formelles à une variable. Montrer que $1+t$ est inversible d'inverse

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i t^i. \tag{3}$$