Automorphismes polynomiaux du plan

Séance d'exercices 6

Marc Abboud

31 Octobre 2024

Exercice 1. Soit $X \subset \mathbf{A}^n$ une variété affine définie par des équations $F_1, \ldots, F_r$ et $x \in X$. Soit $L \subset \mathbf{A}^n$ une droite passant par X. On peut voir L comme l'image d'un morphisme affine $\phi : \mathbf{A}^1 \to \mathbf{A}^n$ tel que $\phi(0) = x$. Montrer que la multiplicité d'intersection de L en x est égale à

$$\dim_K O_{\mathbf{A}^1,0}/(\phi^* F_1, \ldots, \phi^* F_r). \tag{1}$$

On pourra utiliser la formule des séries formelles :

$$\frac{1}{1 + tQ(t)} = \sum_{i \geqslant 0} (-1)^i t^i Q(t)^i. \tag{2}$$

Exercice 2. Soit X l'union des trois axes de coordonnées de $\mathbf{A}^3$. Calculer l'anneau local de X en l'origine et son espace tangent.

Même question avec $Y = \{xy(x-y) = 0\} \subset \mathbf{A}^2$.

Exercice 3. Calculer l'esapce tangent en l'origine de $\left\{y^2 = x^3\right\}$.

Exercice 4. Soient $X_1, X_2 \subset \mathbf{A}^n$ des variétés affines qui s'intersectent et soit $x \in X_1 \cap X_2 = X$. Montrer que

$$\Theta_{X_1,x} + \Theta_{X_2,x} \subset \Theta_{X,x}. \tag{3}$$

Est-ce qu'on a toujours l'égalité ?