Automorphismes polynomiaux du plan

Séance d'exercices 5

Marc Abboud

24 Octobre 2024

Exercice 1. Montrer que si X est projective et irréductible, alors $K[X] = K$. En déduire que tout morphisme $X \to Y$ où X est projective irréductible et Y est affine irréductible envoie X sur un point.

Exercice 2. Soit $f : X \to Y$ un morphisme surjectif de variétés irréductibles. On veut montrer le résultat suivant : pour tout $y \in Y$, on a

$$\dim f^{-1}(y) \geqslant \dim X - \dim Y. \tag{1}$$

1. Montrer que $\dim X \geqslant \dim Y$.
2. Montrer le résultat suivant : soit $Z \subset Y$ un fermé irréductible, alors pour toute composante irréductible $Z' \subset f^{-1}(Z)$, on a

$$\operatorname{codim}(X, Z') \leqslant \operatorname{codim}(Y, Z). \tag{2}$$

   On raisonnera par récurrence descendante sur la codimension de Z.
3. En déduire le résultat.

Exercice 3. Soient X, Y des variétés irréductibles, montrer que $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$.

Exercice 4. Soit $n \geqslant 1$ un entier, et $d \geqslant 1$ un entier. On définit le *plongement de Veronese* par

$$v_{n,d} : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^{N(n,d)} \tag{3}$$

où $N(n,d) = \binom{n+d}{d} - 1$ et

$$v_{n,d}([x_0 : \cdots : x_n]) = [w_{i_0,\dots,i_n}]_{i_0+\cdots+i_n=d} \tag{4}$$

avec

$$w_{i_0,\dots,i_n} = x_0^{i_0} \cdots x_n^{i_n}. \tag{5}$$

1. Calculer $v_{1,2}, v_{2,2}$ et donner les équations de l'image.
2. Montrer que $v_{n,d}$ est un plongement et que l'image a pour equation

$$w_{i_0,\ldots,i_n} \cdot w_{j_0,\ldots,j_n} = w_{k_0,\ldots,k_n} \cdot w_{l_0,\ldots,l_n} \tag{6}$$

   pour tout n-uplet tel que pour tout $t = 0, \ldots, n, \quad i_t + j_t = k_t + l_t$.
3. Une conique est une courbe de degré 2 dans $\mathbf{P}^2$. Montrer que $\mathbf{P}^2 \backslash C$ où C est une conique est une variété affine (utiliser $v_{2,2}$).