

Automorphismes polynomiaux du plan

Séance d'exercices 4

Marc Abboud

26 Septembre 2024

Exercice 1. On considère $f(x,y) = (\frac{x}{y}, y)$. Donner le domaine de définition de $f : \mathbf{A}^2 \dashrightarrow \mathbf{A}^2$ et de $f : \mathbf{A}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$.

Exercice 2. Soit X une variété quasiprojective irréductible. Montrer que les lois d'additions et de multiplications définies en cours sur $K(X)$ sont bien définies (i.e sont compatibles avec la relation d'équivalence).

Exercice 3. Soient X, Y des variétés quasiprojectives irréductibles et $f : X \dashrightarrow Y$ une application dominante (i.e l'image est dense). Montrer que f induit un homomorphisme de K -algèbres

$$f^* : K(Y) \rightarrow K(X). \quad (1)$$

Montrer que réciproquement tout homomorphisme de K -algèbres $\phi : K(Y) \rightarrow K(X)$ provient d'une application rationnelle dominante $f : X \dashrightarrow Y$. (Se ramener au cas où X, Y sont affines).

Exercice 4. Une *droite* dans $\mathbf{P}^2$ est une courbe de degré 1. On note $\mathrm{PGL}_3(K) = \mathrm{GL}_3(K)/K \cdot \mathrm{id}$.

1. Montrer qu'on a un morphisme de groupes $\mathrm{PGL}_3(K) \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{P}^2)$ donné par

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot [X : Y : Z] = [aX + bY + cZ : dX + eY + fZ : gX + hY + iZ] \quad (2)$$

Montrer que si $p_1, p_2, p_3 \in \mathbf{P}^2$ sont trois points, alors il existe $M \in \text{PGL}_3(K)$ tel que

$$M(p_1) = [0 : 0 : 1], \quad M(p_2) = [0 : 1 : 0], \quad M(p_3) = [1 : 0 : 0] \quad (3)$$

si et seulement si p_1, p_2, p_3 ne sont pas alignés (c'est à dire pas sur une même droite). Pour se faire écrire $p_i = [x_i : y_i : z_i]$ et montrer que trois points sont alignés si et seulement si le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \quad (4)$$

s'annule.

Exercice 5. 1. Montrer que toute droite dans $\mathbf{P}^2$ est isomorphe à $\mathbf{P}^1$.

Soit $C \subset \mathbf{P}^2$ la courbe de degré 2 donnée par l'équation

$$XY + XZ + YZ = 0. \quad (5)$$

On va montrer que C est isomorphe à $\mathbf{P}^1$.

2. Montrer que $p = [0 : 0 : 1]$ appartient à C .
3. Montrer que l'ensemble des droites passant par p est paramétrée par $\mathbf{P}^1$ qu'on notera avec des coordonnées homogènes $[s : t]$.
4. Soit $[s, t]$ une droite passant par p , montrer que cette droite a un unique point d'intersection $q([s : t])$ avec C autre que p et donner les coordonnées de $q([s : t])$ en fonction de $[s : t]$.
5. Montrer que $[s : t] \in \mathbf{P}^1 \mapsto q([s : t]) \in C$ est un isomorphisme.