Automorphismes polynomiaux du plan

Séances d'exercices 3

Marc Abboud

10 Octobre 2024

Exercices à faire : 1 à 5.

Exercice 1. En utilisant le Nullstellensatz sur $\mathbf{A}^n$, montrer le Nullstellensatz pour une variété affine : Soit X une variété affine et $I \subset K[X]$ un idéal, alors

$$V_X(I) = \varnothing \Leftrightarrow 1 \in I. \tag{1}$$

Exercice 2. Soit $n \geqslant 1$ un entier, montrer que $K[\mathbf{P}^n] = K$. En déduire que tout morphisme $\mathbf{P}^m \to \mathbf{A}^n$ envoie $\mathbf{P}^m$ sur un point.

Exercice 3. Montrer que $K[\mathbf{A}^2 \backslash (0,0)] = K[\mathbf{A}^2] = K[x,y]$. En déduire que $\mathbf{A}^2 \backslash (0,0)$ n'est pas une variété affine (considérér le morphisme $\mathbf{A}^2 \backslash (0,0) \hookrightarrow \mathbf{A}^2$).

Exercice 4. Soit X une variété affine et $f \in K[X]$, montrer que

$$K[D(f)] = K[X][f^{-1}]. \tag{2}$$

Exercice 5. Soit $F_0, \ldots, F_m$ des polynômes homogènes à n variables de même degré tels que

$$V_{\mathbf{P}^n}(F_1, \ldots, F_m) = \varnothing. \tag{3}$$

Montrer que ces polynômes induisent un morphisme $F : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^m$ donné par

$$F(x) = [F_0(x) : F_1(x) : \cdots : F_m(x)]. \tag{4}$$

Exercice 6. Soit X une variété affine. Montrer que tout ouvert $U \subset X$ contient un ouvert principal.

Exercice 7. 1. Soient X, Y des variétés affines irréductibles et $f, g : X \to Y$ deux morphismes. Montrer que s'il existe un ouvert U tel que $f_{|U} = g_{|U}$, alors $f = g$.

2. Même question lorsque X, Y sont quasiprojectives et irréductibles (recouvrir X, Y par des ouverts affines).

Exercice 8. Soit X une variété affine et Y une variété quasiprojective, montrer que l'application

$$\begin{aligned} \{f : Y \to X : \text{morphisme}\} &\mapsto \{\phi : K[X] \to K[Y] : \text{homomorphisme de } K\text{-algèbres}\} \\ f &\mapsto f^* \end{aligned}$$

est bijective.