Automorphismes polynomiaux du plan

Séances d'exercices 2

Marc Abboud

03 Octobre 2024

Exercices à faire : 3, 4, 5, 7, 8.

Exercice 1. Soit A un anneau. Une *partie multiplicative* $S \subset A$ est une sous-partie telle que

1. $1 \in S, 0 \notin S$.
2. $\forall x, y \in S, xy \in S$

Le *localisé* de A par rapport à S est l'anneau $S^{-1}A$ munit d'un morphisme d'anneaux $\iota_S : A \to S^{-1}A$ qui vérifie la propriété universelle suivante : pour tout morphisme d'anneaux $\phi : A \to B$ tel que $\phi(S) \subset B^\times$, il existe un unique morphisme d'anneaux $\widehat{\phi} : S^{-1}A \to B$ tels que $\phi = \widehat{\phi} \circ \iota_S$.

On construit $S^{-1}A$ de la façon suivante : On définit la relation d'équivalence sur $A \times S$

$$(a, s) \simeq (a', s') \Leftrightarrow \exists t \in S, t(as' - a's) = 0. \tag{1}$$

On définit $S^{-1}A$ comme l'ensemble des classes d'équivalences et on note $\frac{a}{s} := (a, s)$. C'est anneau avec les lois

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'} \text{ et } \frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'}. \tag{2}$$

Et on définit

$$\forall a \in A, \quad \iota_S(a) = (a, 1) = \frac{a}{1}. \tag{3}$$

1. Montrer que $\sim$ est bien une relation d'équivalence.
2. Montrer que $S^{-1}A$ est bien un anneau et que tout $s \in S$ est inversible dans $S^{-1}A$.
3. Soit $A = K[t]$, on note $S = \{1, t, t^2, t^3, \dots\}$ et on note $K[t, t^{-1}] = S^{-1}K[t]$. Montrer que
$$K[t, t^{-1}] \simeq K[x, y]/(xy - 1). \tag{4}$$
4. De façon plus générale, si A est un anneau et $f \in A$ qui n'est pas nilpotent, alors $S = \{1, f, f^2, \dots\}$ est une partie multiplicative de A et on note $A_f := S^{-1}A$. Montrer que
$$A_f \simeq A[x]/(xf - 1). \tag{5}$$

Exercice 2. On définit l'application $\phi : \mathbf{P}^{n-1} \to \mathbf{P}^n$ par

$$\phi([x_0 : \ldots : x_{n-1}]) = [x_0 : \ldots : x_{n-1} : 0]. \tag{6}$$

1. Montrer que ϕ est bien définie et continue pour la topologie de Zariski.

Exercice 3. Soit $C \subset \mathbf{A}^2$ la courbe $y^2 = x^3$.

1. Montrer que $f(t) = (t^2, t^3)$ définit un morphisme $f : \mathbf{A}^1 \to C$.
2. Montrer que f n'est pas un isomorphisme. On montrera d'abord que tout élément de $K[C]$ s'écrit de façon unique $P(x) + yQ(x)$ avec P, Q des polynômes en x. (Raisonner par récurrence sur le degré par rapport à y et penser à la division euclidienne dans $K(x)[y]$).
3. Montrer que f est birationnelle.

Exercice 4. Montrer que $\{xy = 1\}$ et $\mathbf{A}^1$ ne sont pas isomorphes mais birationnelles.

Exercice 5. Soit $f(x,y,z) = (x, xy, xyz)$ un endomorphisme de $\mathbf{A}^3$. Montrer que f est birationnelle, calculer f^{-1} et donner son domaine de définition.

Exercice 6. [degré de transcendance] Soit L/K une extension de corps. Une famille $(x_1, \ldots, x_n) \in L^n$ est *algébriquement indépendante* si pour tout polynôme $P(t_1, \ldots, t_n) \in K[T] \setminus \{0\}$, on a $P(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. Une *base de transcendence* de L/K est une famille $x_1, \ldots, x_n$ algébriquement indépendante telle que l'extension $L/K(x_1, \ldots, x_n)$ est algébrique. On admettra le fait suivant : Toute base de transcendence de L/K a la même longueur n. On dit que n est le *degré de transcendence* de L/K et on le note $\operatorname{tr.deg} L/K$. Toute famille algébriquement indépendante de longueur $k \geqslant n$ peut être complétée en une base de transcendence de L/K. On peut donc définir de façon alternative le degré de transcendence de L/K comme le maximum des longueurs d'une famille algébriquement indépendante de L sur K.

1. Montrer que $\operatorname{tr.deg} L/K = 0$ si et seulement si L/K est algébrique.
2. Montrer que $\operatorname{tr.deg} K(t_1, \ldots, t_n)/K = n$.

Exercice 7. Soit X un ensemble algébrique irréductible et $Y \subset X$ un fermé irréductible. Montrer que $\dim X \geqslant \dim Y$ avec égalité si et seulement si $X = Y$.

Exercice 8. Soit $f \in K[T]$ un polynôme irréductible. Montrer que $X = V(f) \subset \mathbf{A}^n$ est irréductible. On veut montrer que $\dim X = n - 1$.

1. Montrer que $\dim X \leqslant n - 1$ par l'exercice 7.
2. On peut supposer quitte à permuter les variables que t_n apparaît dans l'écriture du polynôme $f \in K[t_1, \ldots, t_n]$. Montrer que $(t_1, \ldots, t_{n-1})$ est une famille algébriquement indépendante de $K(X)/K$ (penser au Nullstellensatz).
3. Conclure.