Automorphismes polynomiaux du plan

Séance d'exercices 11

Marc Abboud

12 Décembre 2024

On note $A = \mathrm{Aff}(\mathbf{A}^2)$ le groupe des transformations affines de $\mathbf{A}^2$ et E le groupe des transformations élémentaires. C'est à dire celle qui préserve la fibration $q(x,y) = y$.

Exercice 1. On veut montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbf{A}^2)$ est un produit amalgamé de A et E.

1. Montrer que $f \in A \cap E \Leftrightarrow f \in A$ et $f([1:0:0]) = [1:0:0]$.
2. Montrer que si $g \in E \backslash A$, alors le point d'indétermination de g et g^{-1} dans $\mathbf{P}^2$ est $[1:0:0]$ et que la droite à l'infini est contractée dessus par g et g^{-1}.
3. Pour montrer la structure de produit amalgamé, il faut montrer que tout mot
$$m = m_1 \cdots m_n \tag{1}$$
avec $m_i \in E \backslash A$ et $m_{i+1} \in A \backslash E$ ou l'inverse n'est pas l'identité dans $\mathrm{Aut}(\mathbf{A}^2)$. Montrer qu'il suffit de montrer le résultat lorsque le mot commence et finit par un élément de A (penser à la conjugaison).
4. Prenons un mot $m = a_1 e_1 \cdots a_n e_n a_{n+1}$ avec $a_i \in A \backslash E$ et $e_i \in E \backslash A$. En regardant l'action de m sur $[1:0:0]$, montrer que $m \neq \mathrm{id}$.

Exercice 2. Soit X_0 une surface affine et X, Y des complétions de X_0 telles que les bords $X \backslash X_0$ et $Y \backslash Y_0$ soient des cycles de courbes rationnelles. C'est à dire $X \backslash X_0 = E_1 \cup \cdots \cup E_r$ avec $r \geqslant 3, E_i \simeq \mathbf{P}^1, E_i \cdot E_{i+1} = 1$ et $E_1 \cdot E_r = 1$. Soit $f \in \mathrm{Aut}(X_0)$ qui induit une transformation birationnelle $f : X \dashrightarrow Y$. On veut montrer que les points d'indéterminations de f ne peuvent être que des points d'intersections de deux courbes au bord.

1. Question préliminaire : Soit X_0 une surface affine et X une complétiuon de $X \backslash X_0$ telle que

(a) $X\backslash X_0$ soit une union de courbes C_i telle que pour tout (i,j,k) distincts $C_i \cap C_j \cap C_k = \varnothing$.

(b) $X\backslash X_0$ est à croisement normaux simples, c'est à dire pour tout $p \in X\backslash X_0$ et pour tout $i \neq j$

$$i(C_i, C_j) \leqslant 1. \tag{2}$$

Montrer que si on éclate un point de $X\backslash X_0$, la nouvelle complétion Y obtenue vérifie aussi ces deux propriétés.

2. Supposons qu'un des points d'indéterminations propres de f soit un point qui appartient à un unique E au bord. Soit $\pi : Z \to X$ la résolution minimale de f. Montrer par récurrence que l'ensemble des diviseurs exceptionnels au-dessus de p forment un arbre de courbes rationnelles d'auto-intersection $\leqslant -1$. On notera cet arbre Γ.

3. On considère le morphisme birationnel $Z \to Y$ induit par f. C'est une composition d'un nombre fini de contractions de $(-1)-$courbes. Montrer qu'à chaque contraction, la (-1)-courbe contractée ne peut pas être une (-1)-courbe de Γ (quelles sont les (-1)-courbes de Γ ?) ni la transformée stricte de E (utiliser la question 1).

4. En déduire que $Y\backslash X_0$ contient Γ et en déduire une contradiction.