Automorphismes polynomiaux du plan
Séance d'exercices 11

Marc Abboud

5 Décembre 2024

On rappelle qu'on a définit les surfaces de Hirzebruch ainsi

$$\mathbf{F}_n = \left\{[x:y:z]\times[u:v]\in\mathbf{P}^2\times\mathbf{P}^1 : yv^n = zu^n\right\} \tag{1}$$

et on a le plongement

$$\rho_n : (x,y)\in\mathbf{A}^2 \mapsto [x:y^n:1]\times[y:1]. \tag{2}$$

Exercice 1. On considère les deux plongements de $\mathbf{A}^2$:

$$\phi : (x,y)\in\mathbf{A}^2 \mapsto [x:y:1]\in\mathbf{P}^2, \tag{3}$$
$$\psi : (x,y)\in\mathbf{A}^2 \mapsto [x:1]\times[y:1]\in\mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1. \tag{4}$$

Donner une résolution de $\psi\circ\phi^{-1} : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^1\times\mathbf{P}^1$.

Exercice 2.
1. Montrer que $\phi_n : \rho_{n+1}\circ\rho_n^{-1} : \mathbf{F}_n \dashrightarrow \mathbf{F}_{n+1}$ s'étend à $\mathbf{F}_n$ par

$$[x:y:z]\times[u:v]\in\mathbf{F}_n \mapsto [xv:yu:zv]\times[u:v]\in\mathbf{F}_{n+1}. \tag{5}$$

2. Donner le lieu d'indétermination de ϕ_n.
3. Montrer que ϕ_n est une transformation élémentaire.

Exercice 3. Soit $q : \mathbf{F}_n \to \mathbf{P}^1$ munie de sa fibration vers $\mathbf{P}^1$. On définit les ouverts $U_0 = q^{-1}(\mathbf{P}^1\setminus\{\infty\})$ et $U_\infty = q^{-1}(\mathbf{P}^1\setminus\{0\})$. Montrer que ces deux ouverts sont isomorphes à $\mathbf{A}^1\times\mathbf{P}^1$ et que le recollement est donné par

$$t\times[u:v]\in U_0\setminus q^{-1}(0) \mapsto \frac{1}{t}\times[u:t^n v]\in U_\infty\setminus q^{-1}(\infty). \tag{6}$$

Exercice 4. Soit $n \geqslant 1$, on considère $\mathbf{F}_n$ la surface de Hirzebruch avec sa fibration $q : \mathbf{F}_n \to \mathbf{P}^1$. On sait que si E est une section de q et L_∞ une fibre, alors $\mathbf{F}_n \backslash (E \cup L_\infty) = \mathbf{A}^2$.

1. Montrer que $q : \mathbf{F}_n \to \mathbf{P}^1$ est le morphisme associé au système linéaire complet de L_∞.
2. On souhaite décrire le groupe $G = \mathrm{Aut}(\mathbf{F}_n) \cap \mathrm{Aut}(\mathbf{A}^2)$. Montrer que si $f \in G$ alors f fixe E et L_∞.
3. En déduire que f préserve la fibration $q : \mathbf{F}_n \to \mathbf{P}^1$ et donc que f est élémentaire.
4. Montrer que tout automorphisme de la forme $(x,y) \in \mathbf{A}^2 \mapsto (x, ay+b)$ avec $a \neq 0$ s'étend en un automorphisme de $\mathbf{F}_n$. On compose alors f par un tel automorphisme h de sorte que $g = hf \in \mathrm{Aut}(\mathbf{F}_n)$ fixe la fibration q, autrement dit $q \circ g = q$.
5. En reprenant les notations de l'exercice 3, montrer que U_∞ est invariant par g et en déduire que

$$G = \left\{ f(x,y) = (cx + P(y), ay+b) : a, c \in K^\times, b \in K, P(y) \in K[y]_{\leqslant n} \right\}. \quad (7)$$