Automorphismes polynomiaux du plan

Séance d'exercices 1

Marc Abboud

26 Septembre 2024

Exercices à faire absolument : 3, 5, 8, 9, 7, 10.

Exercice 1. Montrer que les ensembles algébriques de $\mathbf{A}^1$ sont exactement les ensembles finis. En déduire qu'une suite injective converge vers tous les points de $\mathbf{A}^1$.

Exercice 2. Soit X un ensemble algébrique. Montrer que la topologie de Zariski sur X est séparée pour l'axiome de séparation suivant : Pour tout $x, y \in X$ il existe un ouvert U tel que $x \in U$ et $y \notin U$.

Exercice 3. Soit $V \subset \mathbf{A}^n$, un sous-ensemble quelconque. On définit

$$I(V) := \{P \in K[T] : \forall v \in V, P(v) = 0\}. \quad (1)$$

Montrer que $I(V)$ est un idéal et que $V(I(V))$ est l'adhérence de V pour la topologie de Zariski. En déduire que $\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$ n'est pas un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^1$.

Exercice 4. Montrer que l'ensemble des points à coordonnées entières $\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{A}^n$ est Zariski dense. (Faire une récurrence).

Exercice 5. Si $\alpha \in \mathbf{A}_K^n$ est un point, montrer que $I_{\{\alpha\}}$ est l'idéal maximal correspondant au noyau du morphisme d'évaluation

$$ev_\alpha : P \in K[T] \rightarrow P(\alpha) \in K. \quad (2)$$

Montrer que réciproquement si $X \subset \mathbf{A}^n$ est un ensemble algébrique tel que I_X est un idéal maximal, alors X est un point.

Exercice 6. Soit X un ensemble algébrique qui est l'union de n points. Montrer que $K[X]$ est un produit de n copies de K .

Exercice 7. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme d'ensembles algébriques. Le sous-ensemble $\Gamma_f \subset X \times Y$ de la dont les points sont de la forme $(x, f(x))$ est appelé le *graphe* de f . Montrer que c'est un ensemble algébrique et que Γ_f est isomorphe à X . On rappelle que $\mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{n+m}$ avec

$$K[\mathbf{A}^{n+m}] = K[T \cup U] \quad (3)$$

où $K[\mathbf{A}^n] = K[T]$ et $K[\mathbf{A}^m] = K[U]$.

Exercice 8. Montrer que $\text{Aut}(\mathbf{A}^1) = \text{Aff}(\mathbf{A}^1) = \{z \mapsto az + b : a \in K^\times, b \in K\}$.

Exercice 9. Un automorphisme *élémentaire* de $\mathbf{A}^2$ est un automorphisme de la forme

$$f(x, y) = (ax + b, cy + P(x)) \quad (4)$$

avec $a, c \neq 0, b \in K, P \in K[t]$. Montrer qu'un automorphisme élémentaire est bien un automorphisme. On note E l'ensemble des automorphismes élémentaires de $\mathbf{A}^2$. Montrer que c'est un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbf{A}^2)$. On note $q : \mathbf{A}^2 \rightarrow \mathbf{A}^1$ la projection $q(x, y) = x$. On veut montrer que pour tout $f \in \text{Aut}(\mathbf{A}^2)$, $f \in E \Leftrightarrow \exists g \in \text{Aut}(\mathbf{A}^1), q \circ f = g \circ q$.

1. Montrer le sens $\Rightarrow$.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbf{A}^1, q^{-1}(\alpha)$ est isomorphe à $\mathbf{A}^1$.

Soit $f = (f_1, f_2) \in \text{Aut}(\mathbf{A}^2)$ tel qu'il existe $g \in \text{Aut} \mathbf{A}^1$ tel que $q \circ f = g \circ q$.

3. Soit $h \in \text{Aut}(\mathbf{A}^2)$ de la forme $h(x, y) = (g(x), y)$. Montrer que h est un automorphisme et que

$$h^{-1} \circ f(x, y) = (x, f_2(x, y)). \quad (5)$$

4. Montrer que $h^{-1} \circ f$ induit un automorphisme sur chaque fibre de q .
5. Écrire $f_2(x, y)$ sous la forme $f_2(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \dots$ et en raisonnant fibre à fibre, montrer que $f_2(x, y) = cy + P(x)$ et conclure.

Exercice 10. Soit X un ensemble algébrique et $f : X \rightarrow X$ un endomorphisme. Soit $S \subset X$ une partie de X telle que $f(S) \subset S$ (on dit que S est f -invariante). Montrer que l'adhérence $\bar{S}$ de S est f -invariante.