

Automorphismes polynomiaux du plan

Université de Neuchâtel - 2024-2025

Marc Abboud

9 décembre 2024

1 Introduction

Ce document contient les notes du cours données à Neuchâtel au premier semestre de l'année 2024-2025. Ces notes sont amenées à évoluer au cours du semestre. Si vous remarquez des erreurs de typographie ou autre merci de me les communiquer.

Le but final de ce cours est de démontrer le théorème de Jung sur la structure du groupe d'automorphismes du plan affine. Nous suivrons la preuve de Stéphane Lamy dans [Lam02]. Pour se faire le cours sera séparé en deux parties. Une première partie consacrée à une introduction à la géométrie algébrique où nous suivrons le livre de Shafarevich [Sha13]. Dans la deuxième partie, nous étudierons la preuve du théorème de Jung et discuterons d'applications sur la dynamique des automorphismes polynomiaux du plan.

Convention.—Dans tout cet ouvrage les corps considérés seront *algébriquement clos* sauf mention explicite du contraire.

Première partie
Géométrie algébrique

Chapitre I

Variétés algébriques

1 Ensembles algébriques

1.1 Topologie de Zariski et ensemble algébrique

Soit K un corps algébriquement clos. On note $\mathbf{A}^n$ ou $\mathbf{A}_K^n$ l'espace affine de dimension n sur K , c'est à dire l'ensemble des points de K^n , ces points sont de la forme $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $\alpha_i \in K$. Soit $K[t_1, \dots, t_n] =: K[T]$ l'anneau des polynômes à n variables sur K . On notera X pour l'ensemble des variables $x_1, \dots, x_n$. On rappelle que cet anneau est *Noetherien*, en particulier tout idéal de $K[T]$ est finiment engendré. Pour un idéal $I \subset K[T]$, on définit

$$V(I) := \{\alpha \in \mathbf{A}_K^n : \forall P \in I, P(\alpha) = 0\}. \quad (1)$$

Si I, J sont deux idéaux de $K[T]$, on note $I + J$ l'idéal engendré par I et J et IJ l'idéal défini par

$$IJ = \langle \{ij : i \in I, j \in J\} \rangle. \quad (2)$$

Lemme 1.1. *On a*

- (1) $I \subset J \Rightarrow V(I) \supset V(J)$.
- (2) $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.
- (3) si $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une collection d'idéaux,

$$V\left(\bigoplus_{\alpha \in A} I_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in A} V(I_\alpha). \quad (3)$$

(4)

Lemme 1.2. Si $I = (P_1, \dots, P_r)$, alors

$$V(I) = \{\alpha \in \mathbf{A}^n : P_1(\alpha) = \dots = P_r(\alpha) = 0\} =: V(P_1, \dots, P_r). \quad (5)$$

Démonstration. Notons W l'ensemble à droite de cette égalité. Comme $P_1, \dots, P_r \in I$, on a $V(I) \subset W$. Réciproquement, si $\alpha \in \mathbf{A}^n$ est tel que $P_1(\alpha) = \dots = P_r(\alpha) = 0$, alors tout élément $P \in I$ s'écrit

$$P = Q_1 P_1 + \dots + Q_r P_r \quad (6)$$

avec $Q_i \in K[T]$ et donc $P(\alpha) = 0$. Cela montre $W \subset V(I)$. $\square$

Définition 1.3. Tout ensemble de la forme $V(I)$ pour I un idéal de $K[T]$ est appelé un *ensemble algébrique* de $\mathbf{A}^n$. La topologie de Zariski sur $\mathbf{A}^n$ est la topologie dont les fermés sont les ensembles algébriques.

Proposition 1.4. La topologie de Zariski est bien une topologie.

Démonstration. Il faut montrer les axiomes suivant :

1. $\emptyset$ et $\mathbf{A}^n$ sont des ensembles algébriques.
2. Une intersection quelconque d'ensembles algébriques est un ensemble algébrique
3. Une union finie d'ensembles algébriques est un ensemble algébrique.

Pour (1), on a $V(1) = \emptyset$ et $V((0)) = \mathbf{A}^n$. Les points (2) et (3) découlent du lemme 1.1. $\square$

Exercice 1.5. Montrer que les ensembles algébriques de $\mathbf{A}^1$ sont exactement les ensembles finis. En déduire qu'une suite injective converge vers tous les points de $\mathbf{A}^1$.

Exercice 1.6. Soit $V \subset \mathbf{A}^n$, un sous-ensemble quelconque. On définit

$$I(V) := \{P \in K[T] : \forall v \in V, P(v) = 0\}. \quad (7)$$

Montrer que $I(V)$ est un idéal et que $V(I(V))$ est l'adhérence de V pour la topologie de Zariski.

En déduire que $\mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$ n'est pas un ensemble algébrique de $\mathbf{A}^1$.

Exercice 1.7. Montrer que l'ensemble des points à coordonnées entières $\mathbf{Z}^2 \subset \mathbf{A}^2$ est Zariski dense.

Proposition 1.8. Si $X \subset \mathbf{A}^n, Y \subset \mathbf{A}^m$ sont des ensembles algébriques, alors $X \times Y \subset \mathbf{A}^{n+m}$ est un ensemble algébrique.

Démonstration. On note $K[T] = K[t_1, \dots, t_n]$ et $K[U] = K[u_1, \dots, u_m]$. Par Noetherianité, $X = V(f_1, \dots, f_r)$ avec $f_i \in K[T]$ et $Y = V(g_1, \dots, g_s)$ avec $g_j \in K[U]$. On identifie $K[T]$ et $K[U]$ avec leur image dans $K[t_1, \dots, t_n, u_1, \dots, u_m]$ et alors il est clair que

$$X \times Y = V(f_1, \dots, f_r, g_1, \dots, g_s). \quad (8)$$

□

Définition 1.9. Un ensemble algébrique X de la forme $X = V(f)$ pour un $f \in K[T]$ est appelé une *hypersurface*.

Une hypersurface dans $\mathbf{A}^2$ est appelée une *courbe* algébrique.

1.2 Anneau des fonctions régulières d'un ensemble algébrique

Soit $X \subset \mathbf{A}^n$ un ensemble algébrique.

Définition 1.10. Une *fonction régulière* sur X est une fonction $f : X \rightarrow K$ tel qu'il existe $F \in K[T]$ telle que

$$\forall x \in X, \quad f(x) = F(x). \quad (9)$$

L'ensemble des fonctions régulières sur X est noté $K[X]$. Les fonctions régulières induites par $t_1, \dots, t_n \in K[T]$ sur $\mathbf{A}^n$ sont appelées les *fonctions coordonnées*.

Exercice 1.11. Montrer que $K[X]$ est un anneau. Montrer que l'on a un homomorphisme d'anneaux injectif $K \hookrightarrow K[X]$. L'anneau $K[X]$ a alors une structure de K -algèbre. Montrer que $K[X]$ est engendré par les fonctions coordonnées.

On a un homomorphisme de K -algèbre $K[T] \rightarrow K[X]$ qui est par définition surjectif. Son noyau I_X est l'idéal qui consiste en les polynômes $F \in K[T]$ tel que $F(x) = 0, \forall x \in X$. On a alors

$$K[X] = K[T]/I_X. \quad (10)$$

Exemple 1.12. Si $X = \mathbf{A}^n$, alors $K[X] = K[T]$. Si $X = \{x\}$ est un point, alors $K[X] = K$.

Exemple 1.13. Soit $X \subset \mathbf{A}^2$ définie par $t_1 \cdot t_2 = 1$. Montrer que $K[X]$ est isomorphe à $K[T, T^{-1}]$.

Proposition 1.14. Soit $X \subset \mathbf{A}^n, Y \subset \mathbf{A}^m$ des ensembles algébriques, on a

$$K[X \times Y] = K[X] \otimes_K K[Y]. \quad (11)$$

Démonstration. On définit l'homomorphisme de K -algèbre $\phi : K[X] \otimes_K K[Y] \rightarrow K[X \times Y]$

$$\phi : \sum_i (f_i \otimes g_i)(x, y) = \sum_i f_i(x)g_i(y). \quad (12)$$

L'application ϕ est surjective, en effet son image contient les fonctions régulières induites par les fonctions coordonnées de $\mathbf{A}^{n+m}$. On montre que ϕ est injective, i.e

$$\phi \left(\sum_{i=1}^N f_i \otimes g_i \right) = 0 \Rightarrow \forall i, \quad f_i \otimes g_i = 0 \in K[X] \otimes_K K[Y]. \quad (13)$$

On raisonne par récurrence sur N . Si $N = 0$, il n'y a rien à faire. Si $N = 1$, alors

$$\forall x \in X, \forall y \in Y, f(x)g(y) = 0. \quad (14)$$

Supposons que $f \neq 0$ dans $K[X]$, alors il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$ et alors en fixant $x_0 = 0$, on a

$$\forall y \in Y, \quad f(x_0)g(y) = 0 \Rightarrow \forall y \in Y, g(y) = 0 \Rightarrow g \in I_Y. \quad (15)$$

Ce qui conclut le cas $N = 1$. Maintenant supposons le résultat vrai pour tout tenseur de longueur $\leq N$ et supposons que

$$\phi \left(\sum_{i=1}^{N+1} f_i \otimes g_i \right) = 0. \quad (16)$$

On peut supposer que les f_i sont K -linéairement indépendants dans $K[X]$, en effet sinon on peut par exemple écrire

$$f_{N+1} = \sum_{i=1}^N \lambda_i f_i \quad (17)$$

avec $\lambda_i \in K$ et alors

$$\sum_{i=1}^{N+1} f_i \otimes g_i = \sum_{i=1}^N f_i \otimes (g_i + \lambda_i g_N). \quad (18)$$

et le résultat est vrai par hérédité. On peut de même supposer que les g_j sont K -linéairement indépendants dans $K[Y]$. Soit $x_0 \in X$, alors on a pour tout $y \in Y$,

$$\sum_{i=1}^{N+1} f_i(x_0)g_i(y) = 0. \quad (19)$$

Par l'indépendance linéaire sur K , on a $\sum_{i=1}^{N+1} f_i(x_0) = 0$ comme $x_0 \in X$ on obtient que

$$\sum_{i=1}^{N+1} f_i \in I_X \quad (20)$$

et ceci contredit l'indépendance linéaire des f_i sur K . Le résultat est vrai par récurrence. $\square$

Exemple 1.15. Si on a $X = V(I)$, il n'est en général pas vrai que $I_X = I$. Par exemple, si $X = V(t_1^2) \subset \mathbf{A}^2$, alors $I_X = (t_1)$. En revanche il est toujours vrai que $X = V(I_X)$. Ce phénomène s'explique par le *Nullstellensatz*.

Théorème 1.16 (Hilbert's Nullstellensatz, Théorème des zéros de Hilbert). *Soit K un corps algébriquement clos, si $P_1, \dots, P_r \in K[T]$ sont tels que*

$$V(P_1, \dots, P_r) = \emptyset, \quad (21)$$

alors il existe $Q_i \in K[T]$ tels que

$$1 = \sum_i Q_i P_i. \quad (22)$$

Autrement dit l'idéal engendré par $P_1, \dots, P_r$ est l'anneau $K[T]$ tout entier.

Voir [Lan02] ou [AM19] pour une preuve.

Corollaire 1.17. *Si $X = V(P_1, \dots, P_r)$ est un ensemble algébrique et $Q \in K[T]$ est tel que $Q \in I_X$, alors il existe $m \geq 1$ tel que*

$$Q^m \in (P_1, \dots, P_r). \quad (23)$$

Démonstration. On rajoute une variable u à l'ensemble T et on considère le système d'équation

$$P_1 = \dots = P_r = uQ - 1. \quad (24)$$

Comme $Q \in I_X$, on a que ce système d'équations n'a pas de solutions dans $\mathbf{A}^{n+1}$ donc par le Nullstellensatz, il existe $F_1, \dots, F_{r+1} \in K[t_1, \dots, t_n, u]$ tels que

$$F_1(T, u)P_1(T) + \dots + F_r(T, u)P_r(T) + F_{r+1}(T, u)(uQ(T) - 1) = 1. \quad (25)$$

On peut remplacer u par $\frac{1}{Q(T)}$ dans cette équation et en multipliant $Q(T)^m$ pour m assez grand de sorte que l'on élimine les dénominateurs, on a $Q(T)^m \in (P_1, \dots, P_r) \subset K[T]$. $\square$

Corollaire 1.18. *Pour tout idéal $I \subset K[T]$, on a*

$$I_{V(I)} = \sqrt{I} = \{Q \in K[T] : \exists m \geq 1 Q^m \in I\}. \quad (26)$$

Si $Y \subset X$ sont des ensembles algébriques, alors on a $I_X \subset I_Y$. Par restriction des fonctions régulières on a un homomorphisme de K -algèbres $\phi_{XY} : K[X] \rightarrow K[Y]$.

Exercice 1.19. Montrer que le noyau de ϕ_{XY} est exactement l'image de I_Y dans $K[X]$.

Exercice 1.20. Si $\alpha \in \mathbf{A}_K^n$ est un point, montrer que $I_{\{\alpha\}}$ est l'idéal maximal correspondant au noyau du morphisme d'évaluation

$$\text{ev}_\alpha : P \in K[T] \rightarrow P(\alpha) \in K. \quad (27)$$

Montrer que réciproquement si $X \subset \mathbf{A}^n$ est un ensemble algébrique tel que I_X est un idéal maximal, alors X est un point.

Si $X \subset \mathbf{A}^n$ tout sous-ensemble de X de la forme

$$V(u) = \{x \in X : u(x) = 0\} \quad (28)$$

est appelé une *hypersurface* de X .

Proposition 1.21. *Soit $X \subset \mathbf{A}^n$ un ensemble algébrique, alors la topologie de Zariski induite sur X est exactement la topologie dont les fermés sont de la forme*

$$V_X(I) = \{x \in X : i(x) = 0, \forall i \in I\} \quad (29)$$

pour $I \subset K[X]$ un idéal.

Démonstration. Comme $\pi : K[T] \rightarrow K[X] = K[T]/I_X$ est surjectif, si $I \subset K[T]$ est un idéal, alors $\pi(I)$ est aussi un idéal. Tout fermé de X est de la forme $V(I) \cap X$ où $I \subset K[T]$ est un idéal et on a

$$V(I) \cap X = V_X(\pi(I)). \quad (30)$$

Réciproquement, si $I \subset K[X]$ est un idéal, alors $\pi^{-1}(I)$ est un idéal de $K[T]$ qui contient I_X et alors $V(\pi^{-1}(I)) = V_X(I)$. $\square$

1.3 Morphismes

Une application polynomiale $\phi : \mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}^m$ est une fonction telle qu'il existe des polynômes $P_1, \dots, P_m \in K[t_1, \dots, t_n]$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{A}^n, \quad \phi(x) = (P_1(x), \dots, P_m(x)). \quad (31)$$

Soient $X \subset \mathbf{A}^n, Y \subset \mathbf{A}^m$ des ensembles algébriques.

Définition 1.22. Un *morphisme* entre X et Y est une fonction $f : X \rightarrow Y$ telle qu'il existe $f_1, \dots, f_m \in k[X]$ tels que

$$\forall x \in X, \quad f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)). \quad (32)$$

Autrement dit, un morphisme est induit par une application polynomiale $\mathbf{A}^n \rightarrow \mathbf{A}^m$ qui envoie X dans Y . La composée de deux morphismes est encore un morphisme. Tout sous-ensemble de X de la forme $f^{-1}(\{y\})$ est appelé une *fibre* de f .

Si $X = Y$, on dira que f est un *endomorphisme* de X . Si f est un endomorphisme inversible pour la composition, on dira que f est un *automorphisme* de X .

Lemme 1.23. Si $Y \subset \mathbf{A}^m$ et $\phi : X \rightarrow \mathbf{A}^m$ un morphisme donné par $P_1, \dots, P_m$, alors ϕ induit un morphisme $X \rightarrow Y$ si et seulement si

$$\forall Q \in I_Y, \quad Q(P_1, \dots, P_m) = 0 \in K[X]. \quad (33)$$

Exemple 1.24. Un morphisme $X \rightarrow \mathbf{A}^1$ est exactement une fonction régulière sur X .

Exemple 1.25. La projection $(x, y) \mapsto x$ est un morphisme de $\{xy = 1\}$ vers $\mathbf{A}^1$. On peut généraliser cet exemple de la façon suivante : Si $X \subset \mathbf{A}^n$ est un ensemble algébrique et $F \in K[X]$. On considère l'ensemble algébrique $X' \subset X \times \mathbf{A}^1$ défini par l'équation $uF - 1 = 0$. Alors la projection $X' \rightarrow X$ est un morphisme.

Exemple 1.26. Soit $S_D \subset \mathbf{A}^3$ la surface définie par

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz + D \quad (34)$$

avec $D \in K$. Si on fixe y, z , on a une équation de degré 2 en x . On peut définir σ_x qui permute les deux solutions en x à y, z fixé. Cela donne

$$\sigma_x(x, y, z) = (yz - x, y, z). \quad (35)$$

C'est bien un automorphisme de S_D et on a $\sigma_x^2 = \text{id}$. De façon similaire on définit les automorphismes σ_y, σ_z .

Tout morphisme $\phi : X \rightarrow Y$ induit un homomorphisme de K -algèbres $\phi^* : K[Y] \rightarrow K[X]$ de *tiré-en-arrière* (pullback en anglais) défini par

$$\forall P \in K[Y], \quad \phi^* P := P \circ \phi. \quad (36)$$

Réciproquement, tout homomorphisme de K -algèbres $f : K[Y] \rightarrow K[X]$ est l'homomorphisme de tiré-en-arrière d'un morphisme $\phi : X \rightarrow Y$. En effet, soit $t_1, \dots, t_m$ les fonctions coordonnées sur $\mathbf{A}^m \supset Y$, alors $f(t_i)$ est une fonction régulière sur X donc il existe $P_i \in K[X]$ tel que $f(t_i) = P_i$ sur X . On a alors que $f = \phi^*$ avec

$$\phi = (P_1, \dots, P_m) \quad (37)$$

En effet, si $Q(t_1, \dots, t_m) \in K[t_1, \dots, t_m]$, alors

$$Q(P_1, \dots, P_m) = Q(f(t_1), \dots, f(t_m)) = f(Q(t_1), \dots, Q(t_m)). \quad (38)$$

En particulier, si $Q \in I_Y$, alors pour tout $x \in X$, $Q(P_1, \dots, P_m)(x) = 0$.

Corollaire 1.27. *Tout morphisme $\phi : X \rightarrow Y$ induit une fonction continue pour la topologie de Zariski.*

Définition 1.28. Un morphisme $\phi : X \rightarrow Y$ d'ensembles algébriques est un *isomorphisme* s'il admet un inverse, c'est à dire s'il existe $\psi : Y \rightarrow X$ un morphisme tel que $\phi \circ \psi = \text{id}_Y$ et $\psi \circ \phi = \text{id}_X$.

Proposition 1.29. *Deux ensembles algébriques X, Y sont isomorphes si et seulement si $K[X] \simeq K[Y]$ en tant que K -algèbres.*

Démonstration. Si $\phi : X \rightarrow Y$ est un isomorphisme d'inverse ϕ^{-1} , alors les morphismes de tiré-en-arrière en arrière ϕ^* et $(\phi^{-1})^*$ induisent des isomorphismes de K -algèbres entre $K[X]$ et $K[Y]$.

Réciproquement, si $f : K[X] \rightarrow K[Y]$ est un isomorphisme de K -algèbres, alors on a vu que $f = \phi^*$ et $f^{-1} = \psi^*$ avec ϕ, ψ des morphismes entre X et Y . On a que ϕ et ψ sont des isomorphismes, inverse l'un de l'autre. $\square$

Exemple 1.30. Soit $C \subset \mathbf{A}^2$ la courbe définie par $x = y^k$, montrer que C est isomorphe à $\mathbf{A}^1$ par

$$f(x, y) = x \text{ et } g(t) = (t^k, t). \quad (39)$$

Exemple 1.31. La projection $f(x, y) = x$ de $\{xy = 1\}$ vers $\mathbf{A}^1$ n'est pas un isomorphisme car f n'est pas surjective, aucun point n'est envoyé sur 0.

Exercice 1.32. Montrer que $\text{Aut}(\mathbf{A}^1) = \text{Aff}(\mathbf{A}^1) = \{z \mapsto az + b : a \in K^\times, b \in K\}$.

Exercice 1.33. Un automorphisme *élémentaire* de $\mathbf{A}^2$ est un automorphisme de la forme

$$f(x, y) = (ax + b, cy + P(x)) \quad (40)$$

avec $a, c \neq 0, b \in K, P \in K[t]$. Montrer qu'un automorphisme élémentaire est bien un automorphisme. On note E l'ensemble des automorphismes élémentaires de $\mathbf{A}^2$. Montrer que c'est un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbf{A}^2)$. On note $q : \mathbf{A}^2 \rightarrow \mathbf{A}^1$ la projection $q(x, y) = x$. On veut montrer que pour tout $f \in \text{Aut}(\mathbf{A}^2)$, $f \in E \Leftrightarrow \exists g \in \text{Aut}(\mathbf{A}^1), q \circ f = g \circ q$.

1. Montrer le sens $\Rightarrow$. Soit $f = (f_1, f_2) \in \text{Aut}(\mathbf{A}^2)$ tel qu'il existe $g \in \text{Aut} \mathbf{A}^1$ tel que $q \circ f = g \circ q$.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbf{A}^1, q^{-1}(\alpha)$ est isomorphe à $\mathbf{A}^1$.
3. Montrer qu'on peut trouver $h \in \text{Aut}(\mathbf{A}^2)$ de la forme $h(x, y) = (h_1(x, y), y)$ tel que

$$h^{-1} \circ f(x, y) = (x, f_2(x, y)). \quad (41)$$

4. Montrer que $h^{-1} \circ f$ induit un automorphisme sur chaque fibre de q .
5. Écrire $f_2(x, y)$ sous la forme $f_2(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + a_2(x)y^2 + \dots$ et en raisonnant fibre à fibre, montrer que $f_2(x, y) = cy + P(x)$ et conclure.

On dit qu'un morphisme est *dominant* si son image est dense.

Proposition 1.34. *Un morphisme $f : X \rightarrow Y$ d'ensembles algébriques est dominant si et seulement si $f^* : K[Y] \rightarrow K[X]$ est injectif.*

Démonstration. Si f^* n'est pas injectif alors il existe $u \in K[Y]$ dans le noyau de f^* . On vérifie alors que $f(X) \subset V(u) \subsetneq Y$ et donc $f(X)$ n'est pas dense dans Y .

Réciproquement, si $f(X)$ n'est pas dense dans Y , alors il existe une fonction régulière $P \in K[Y]$ telle que $f(X) \subset V_Y(P)$ et alors on a $P \in \ker f^*$. $\square$

Proposition 1.35. *Une K -algèbre A est l'anneau des fonctions d'un ensemble algébrique X si et seulement si elle ne contient pas de nilpotent et est de type fini.*

Démonstration. Si $A = k[X]$, alors A une K -algèbre quotient d'un anneau de polynômes $K[T]$ donc est de type fini. Il est clair que $k[X]$ ne contient pas de nilpotents.

Réciproquement, on écrit $A = K[T]/I$ et soit X l'ensemble algébrique $X = V(I)$. On veut montrer que $K[X] = A$ c'est à dire que $I = I_X$. Soit $F \in I_X$, alors par le Nullstellensatz (Théorème 1.16) il existe $m \geq 1$ tel que $F^m \in I$. Si $F \notin I$, alors F est un nilpotent dans $A = K[T]/I$ et c'est absurde. Donc $I_X \subset I$ et aussi $I \subset I_X$. $\square$

Exercice 1.36. Soit X un ensemble algébrique et $f : X \rightarrow X$ un endomorphisme. Soit $S \subset X$ une partie de X telle que $f(S) \subset S$ (on dit que S est f -invariante). Montrer que l'adhérence $\bar{S}$ de S est f -invariante.

1.4 Composantes irréductibles et fonctions rationnelles

Définition 1.37. un ensemble algébrique est *réductible* s'il existe deux fermés stricts $Y_1, Y_2 \subsetneq X$ tels que

$$X = Y_1 \cup Y_2. \quad (42)$$

Elle est dite *irréductible* sinon.

Théorème 1.38. *Tout ensemble algébrique X est une union finie de fermés irréductibles. Cette décomposition est unique.*

Démonstration. Si ce n'est pas le cas alors il existe un ensemble algébrique X pour laquelle le théorème est faux. La variété X ne peut pas être irréductible donc on écrit $X = X_1 \cup X_2$ avec Y_i des fermés stricts et le théorème est faux pour un des X_i , par exemple X_1 et on peut recommencer avec X_1 . On construit alors une suite infinie strictement décroissante de fermés $X \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \dots$. En passant aux idéaux, on obtient une suite strictement croissante infini d'idéaux

$$I_X \subsetneq I_{X_1} \subsetneq I_{X_2} \subsetneq \dots \quad (43)$$

ce qui contredit le fait que $K[X]$ est Noetherien.

Pour l'unicité, voir Theorem 1.5 de [Sha13]. $\square$

Définition 1.39. Si X est un ensemble algébrique qui se décompose de façon unique en union finie de fermés irréductibles

$$X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_s \quad (44)$$

on appelle chaque X_i une *composante irréductible* de X .

Exemple 1.40. si $X = V(xy) \subset \mathbf{A}^2$, alors

$$X = V(x) \cup V(y). \quad (45)$$

Soit A un anneau et $I \subset A$ un idéal de A . On dit que I est un idéal *premier* si pour tout $x, y \in A$, $xy \in I \Rightarrow x \in I$ ou $y \in I$. C'est équivalent à ce que A/I est un anneau intègre.

Proposition 1.41. *Soit X un ensemble algébrique et $Y \subset X$ un fermé, alors Y est irréductible si et seulement si I_Y est premier.*

Démonstration. Si $P, Q \in K[X]$ sont des fonctions régulières non nulles sur Y mais telles que $PQ \in I_Y$, alors

$$Y = V_Y(P) \cup V_Y(Q) \quad (46)$$

n'est pas irréductible. Réciproquement, si $Y = Y_1 \cup Y_2$, alors il existe P_i régulière sur X telle que P_i est nulle sur Y_i mais non nulle sur Y_j et alors $P_i P_j \in I_Y$ donc I_Y n'est pas un idéal premier. $\square$

Exercice 1.42. Une hypersurface $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ est irréductible si et seulement si $f \in K[T]$ est irréductible.

Proposition 1.43. *Un produit d'ensembles algébriques irréductibles est irréductible.*

Démonstration. Utiliser la proposition suivante et la proposition 1.14. $\square$

Proposition 1.44. *Un ensemble algébrique X est irréductible si et seulement si $K[X]$ est intègre.*

Démonstration. Par la proposition 1.41, on a que X est irréductible si et seulement si I_X est premier si et seulement si $K[X] = K[T]/I_X$ est intègre. $\square$

Définition 1.45. Soit X un ensemble algébrique irréductible, on note $K(X)$ le corps des fractions de $K[X]$, on l'appelle le *corps des fonctions rationnelles* de X .

Une fonction rationnelle $\phi \in K(X)$ est régulière au point $x \in X$ si on peut écrire $\phi = \frac{f}{g}$ avec $f, g \in K[X]$ avec $g(x) \neq 0$. Dans ce cas on note $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ la valeur de ϕ en x .

Proposition 1.46. *Si $\phi \in K(X)$ est régulière en tout point de X , alors $\phi \in K[X]$.*

Démonstration. Pour tout $x \in X$, on peut écrire $\phi = \frac{f_x}{g_x}$ avec $f_x, g_x \in K[X]$ et $g_x(x) \neq 0$. On note I l'idéal engendré par $(g_x, x \in X)$. Par Notherianité, I est finiment engendré donc il existe un nombre fini de points $x_1, \dots, x_r \in X$ tel que $I = (g_{x_1}, \dots, g_{x_r})$. On a $V(I) = \emptyset$ car pour tout $x \in X$, $g_x(x) \neq 0$. Par le Nullstellensatz (Théorème 1.16), il existe $h_i \in K[X]$ tel que

$$h_1 g_{x_1} + \dots + h_r g_{x_r} = 1. \quad (47)$$

En multipliant chaque côté de cette équation par ϕ en utilisant le fait que $\phi = \frac{f_{x_i}}{g_{x_i}}$, on a

$$\phi = h_1 f_{x_1} + \cdots + h_r f_{x_r} \in K[X]. \quad (48)$$

□

Pour toute fonction rationnelle $\phi \in K(X)$, l'ensemble des points en lesquels ϕ est régulière est ouvert et non vide. En effet, si on écrit $\phi = \frac{f}{g}$, alors ϕ est régulière sur le complémentaire du fermé $\{g = 0\}$. Pour toute représentation $\phi = \frac{f_i}{g_i}$, ϕ est régulière sur U_i , le complémentaire de $\{g_i = 0\}$ et l'ensemble des points où ϕ est régulière est par définition

$$U = \bigcup_i U_i \quad (49)$$

qui est ouvert. On appelle cet ouvert le *domaine de définition* de ϕ et on le note $\text{Dom}(\phi)$. De plus, si $\phi_1, \dots, \phi_r$ sont des fonctions rationnelles alors $\text{Dom}(\phi_1) \cap \cdots \cap \text{Dom}(\phi_r)$ est un ouvert non vide de X . Cela vient du lemme suivant

Lemme 1.47. *Si X est un ensemble algébrique irréductible et $U_1, \dots, U_r$ sont des ouverts, alors*

$$U_1 \cap \cdots \cap U_r \quad (50)$$

est non vide.

Démonstration. Soit Y_i le complémentaire de U_i , si l'intersection est vide, alors $\bigcup_i Y_i = X$ mais alors X n'est pas irréductible. □

Cela veut dire que l'on peut toujours comparer des fonctions rationnelles sur un ouvert. On verra plus tard qu'en fait une fonction rationnelle est une classe d'équivalence de fonctions régulières avec $f \simeq g \Leftrightarrow$ il existe un ouvert U tel que $f|_U = g|_U$. Pour l'instant on énonce le résultat suivant.

Lemme 1.48. *Soit X un ensemble algébrique irréductible et $\phi \in K(X)$ telle que $\phi(x) = 0$ pour tout $x \in U$ avec U ouvert, alors $\phi = 0$.*

Démonstration. Si $\phi \neq 0$, alors on écrit $\phi = \frac{f}{g}$. Et on peut décomposer X en

$$X = \{f = 0\} \cup \{g = 0\} \quad (51)$$

ce qui contredit l'irréductibilité de X . □

1.5 Applications rationnelles

Définition 1.49. Soit X un ensemble algébrique irréductible et $Y \subset \mathbf{A}^m$ un ensemble algébrique. Une application rationnelle $\phi : X \dashrightarrow Y$ est la donnée de $\phi_1, \dots, \phi_m \in K(X)$ tels que pour tout $x \in \text{Dom}(\phi_1) \cap \dots \cap \text{Dom}(\phi_m)$

$$(\phi_1(x), \dots, \phi_m(x)) \in Y. \quad (52)$$

On dit que ϕ est *régulière* au point x si tous les ϕ_i le sont et on appelle $\phi(x) \in Y$ l'image de x . L'image de ϕ est l'ensemble

$$\phi(X) = \{\phi(x) : x \in X \text{ et } \phi \text{ est régulière en } x\}. \quad (53)$$

L'ensemble des points où ϕ est régulière est appelé le *domaine de définition* de ϕ et c'est un ouvert non vide.

On dit que $\phi : X \dashrightarrow Y$ est *dominant* si $\phi(X)$ est dense dans Y (en particulier Y est irréductible). Pour toute fonction régulière $f \in K[Y]$, ϕ^*f est une fonction rationnelle de X . En effet, si f est donnée par la fonction polynomiale $u(t_1, \dots, t_m)$, alors

$$\phi^*f = u(\phi_1, \dots, \phi_m). \quad (54)$$

On a donc un homomorphisme d'anneaux $\phi^* : K[Y] \rightarrow K(X)$. Ce morphisme est injectif en effet si $f \in K[Y]$ est telle que $\phi^*f = 0$, alors $\phi(X) \subset V(f)$ et cela contredit le fait que $\phi(X)$ est dense. On a donc que ϕ induit une extension de corps $\phi^* : K(Y) \hookrightarrow K(X)$. C'est en fait une équivalence, ϕ est dominante si et seulement si $\phi^* : K[Y] \rightarrow K(X)$ est injectif.

Si ϕ, ψ sont des applications rationnelles dominantes, il est facile de voir que la composée $\phi \circ \psi$ l'est aussi et on a

$$(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*. \quad (55)$$

Proposition 1.50. Soient X, Y des ensembles algébriques irréductibles, et $f : K(Y) \hookrightarrow K(X)$ un homomorphisme de K -algèbres, alors il existe une unique application rationnelle dominante $\phi : X \dashrightarrow Y$ telle que

$$\phi^* = f \quad (56)$$

Démonstration. La preuve est analogue au cas des morphismes pour les ensembles algébriques. L'unicité vient du fait que si $\phi, \psi : X \dashrightarrow Y$ satisfont le lemme, alors

en appliquant $\phi^* - \psi^*$ à chaque fonction coordonnées, on obtient que pour sur $\text{Dom}(\phi) \cap \text{Dom}(\psi)$ $i = 1, \dots, m, \phi_i(x) = \psi_i(x)$ et par le lemme 1.48, on a $\phi_i = \psi_i$.

Pour l'existence, on note $\phi_i = f(t_i)$ où $t_1, \dots, t_m$ sont les fonctions coordonnées sur Y . On définit $\phi : (\phi_1, \dots, \phi_m)$, alors ϕ est une application rationnelle $\phi : X \dashrightarrow Y$. On a $\phi^* = f$ car ϕ^* et f sont des homomorphismes de K -algèbres qui coïncident sur les fonctions coordonnées. Il vient que ϕ est dominant car f est injectif et $\phi^* = f$. $\square$

Définition 1.51. Une application rationnelle $\phi : X \dashrightarrow Y$ est *birationnelle* si elle est dominante et s'il existe $\psi : Y \dashrightarrow X$ rationnelle dominante telle que

$$\phi \circ \psi = \text{id}_Y, \quad \psi \circ \phi = \text{id}_X. \quad (57)$$

On dit que X est birationnelle à Y s'il existe une application birationnelle entre X et Y .

Un ensemble algébrique irréductible birationnel à $\mathbf{A}^n$ est dit *rationnel*.

Proposition 1.52. Soient X, Y deux ensembles algébriques irréductibles. X est birationnelle à Y si et seulement si $K(X)$ et $K(Y)$ sont K -isomorphes

Démonstration. Découle directement du lemme 1.50. $\square$

1.6 Dimension

On définit ici la notion de dimension d'un ensemble algébrique, si $K = \mathbf{C}$, on retrouve la définition de géométrie différentielle.

Définition 1.53. Soit X un ensemble algébrique irréductible, la *dimension* de X est défini comme la longueur maximale de chaîne de fermés irréductibles strict dans X :

$$\dim X := \max \{n \geq 0 : \exists Y_0 \subsetneq Y_1 \subsetneq \dots \subsetneq Y_n = X, Y_i \subset X \text{ fermé irréductible}\}. \quad (58)$$

Si X est un ensemble algébrique quelconque et $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ sa décomposition en composantes irréductibles, alors on définit

$$\dim X := \max_i \dim X_i. \quad (59)$$

La *dimension* d'un anneau intègre A est la longueur maximale d'une chaîne d'idéaux premiers emboîtés :

$$\dim A = \max \{n \geq 0 : \exists I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \dots \subsetneq I_n = \{0\}, I_j \subset A \text{ idéal premier}\}. \quad (60)$$

Si $\mathfrak{p} \subset A$ est un idéal premier, la *hauteur* de $\mathfrak{p}$ est défini comme la longueur maximale d'une chaîne d'idéaux premiers emboîtés :

$$\text{hauteur}(\mathfrak{p}) = \max \{n \geq 0 : \exists \mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_n = \{0\}, \mathfrak{p}_j \subset A \text{ idéal premier}\}. \quad (61)$$

Proposition 1.54. *Soit A un anneau intègre qui est une K -algèbre de type fini, alors*

$$\dim A = \text{tr. deg}(\text{Frac}(A)/K) \quad (62)$$

et pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, on a

$$\text{hauteur}(\mathfrak{p}) + \dim A/\mathfrak{p} = \dim A. \quad (63)$$

En particulier si X est un ensemble algébrique irréductible, alors

$$\dim X = \dim K[X] = \text{tr. deg } K(X)/K. \quad (64)$$

Démonstration. Voir [AM19]. □

Corollaire 1.55. *Pour tout $n \geq 0$,*

$$\dim \mathbf{A}^n = n \quad (65)$$

Démonstration. On a $K(\mathbf{A}^n) = K(t_1, \dots, t_n)$ et donc $\text{tr. deg } K(\mathbf{A}^n)/K = n$. □

Exercice 1.56. Toute hypersurface de $\mathbf{A}^n$ est de dimension $n - 1$.

2 Variétés projectives et quasiprojectives

2.1 L'espace projectif

L'espace projectif de dimension n sur un corps K est défini de la façon suivante. C'est le quotient de $K^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence suivante $(\xi_0, \dots, \xi_n) \simeq (\eta_0, \dots, \eta_n)$ si et seulement si il existe $\lambda \in K \setminus \{0\}$ tel que pour $i = 0, \dots, n$, $\xi_i = \lambda \eta_i$. On notera

$$[\xi_0 : \dots : \xi_n] \quad (66)$$

la classe d'équivalence de $(\xi_0, \dots, \xi_n)$.

Soit $S = S_0, \dots, S_n$ un ensemble de variables, il n'est pas possible en général d'évaluer un polynôme $P \in K[S]$ en $\xi \in \mathbf{P}^n$. En effet, il faudrait que $P(\xi)$ ne dépende pas du choix de représentants pour ξ et cela n'est possible que pour les

polynômes constants. En revanche, si P est un polynôme homogène de degré d , c'est à dire que

$$\forall \lambda \in K, \quad P(\lambda S) = \lambda^d P(S). \quad (67)$$

alors il est possible de définir le lieu de zéro de P dans $\mathbf{P}^n$. En effet, si $P(\xi_0, \dots, \xi_n) = 0$, alors

$$P(\lambda \xi_0, \dots, \lambda \xi_n) = \lambda^d P(\xi_0, \dots, \xi_n) = 0. \quad (68)$$

On peut alors étendre la définition à tout polynôme P de $k[S]$ en définissant $P(\xi) = 0$ si et seulement si $P_k(\xi) = 0$ pour $k = 0, \dots, \deg(P)$ où P_k est la composante homogène de P de degré k .

Soit $I \subset K[S]$ un idéal. On dit que I est un idéal *homogène* si pour tout $P \in I$, chaque composante homogène de P est dans I . C'est équivalent à ce que I soit engendré par des polynômes homogènes. On définit pour tout idéal homogène I ,

$$V(I) := \{\xi \in \mathbf{P}^n : P(\xi) = 0, \forall P \in I\}. \quad (69)$$

Définition 2.1. La topologie de Zariski sur $\mathbf{P}^n$ est celle dont les fermés sont de la forme $V(I)$ pour I un idéal homogène de $k[S]$.

Un sous-ensemble fermé de $\mathbf{P}^n$ défini par une seule équation $F = 0$ avec F homogène est appelée une *hypersurface* de $\mathbf{P}^n$. Le *degré* de l'hypersurface est égal au degré de F . Une hypersurface de degré 2 est appelée une *quadrique*.

Remarque 2.2. Il existe des idéaux homogènes $I \subset K[S]$ tel que $V(I) = \emptyset$, par exemple $I = (S_0, \dots, S_n)$. Ils sont caractérisés par le lemme suivant.

Lemme 2.3. Soit $I \subset K[S]$ un idéal homogène, alors $V(I) = \emptyset$ si et seulement si I contient tous les monômes de degré s pour un $s \geq 0$.

Démonstration. Si I contient tous les monômes de degrés s pour un certain $s \geq 0$, alors si $s = 0$, $I = k[S]$ et le résultat est vrai et si $s \geq 1$, alors I contient S_i^s pour $i = 0, \dots, n$ l'intersection des $V(S_i)$ est vide.

Réciproquement, soit $F_1, \dots, F_r$ des polynômes homogènes qui engendrent I . On définit $t_i = \frac{S_i}{S_0}$ pour $i = 1, \dots, n$. Par hypothèse, le système d'équation

$$F_i(1, t_1, \dots, t_n) = 0 \quad (70)$$

n'a pas de solutions dans $\mathbf{A}^n$. Donc par le Nullstellensatz, il existe $g_i(t_1, \dots, t_n) \in K[T]$ tels que

$$h_1(t_1, \dots, t_n)F_1(1, t_1, \dots, t_n) + \dots + h_r(t_1, \dots, t_n)F_r(1, t_1, \dots, t_n) = 1. \quad (71)$$

En remplaçant t_i par $\frac{S_i}{S_0}$ et en multipliant par une certaine puissance $S_0^{l_0}$, on obtient que $S_0^{l_0} \in I$. De façon analogue on montre qu'il existe $l_i \geq 1$ tel que $S_i^{l_i} \in I$. Soit $l = \max(l_i)$ et $s = (l-1)(n+1) + 1$. Tout monôme de degré s est de la forme

$$S_0^{a_0} \cdots S_n^{a_n} \quad (72)$$

avec $a_0 + \cdots + a_n = s$. Il existe alors nécessairement un indice k tel que $a_k \geq l \geq l_k$ et donc tout monôme de degré s est dans I . $\square$

De la même façon que pour l'espace affine, pour tout fermé $X \subset \mathbf{P}^n$, on peut définir un idéal homogène I_X défini par

$$I_X = \{P \in K[S] : \forall x \in X, P(x) = 0\}. \quad (73)$$

Par Noetherianité, il est engendré par un nombre fini de polynômes homogènes.

On appelle $S = (S_0, \dots, S_n)$ les *coordonnées homogènes* de $\mathbf{P}^n$. Pour tout $i = 0, \dots, n$, l'ouvert $U_i := \{S_i \neq 0\}$ est en bijection avec $\mathbf{A}^n$ par

$$\phi_i : [\xi_0 : \dots : \xi_n] \in U_i \mapsto \left(\frac{\xi_0}{\xi_i}, \dots, \frac{\xi_{i-1}}{\xi_i}, \frac{\xi_{i+1}}{\xi_i}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_i} \right) \quad (74)$$

de réciproque

$$\psi_i : (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{A}^n \mapsto [x_0 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n] \in U_i. \quad (75)$$

On notera parfois $U_i = \mathbf{A}_i^n$ par cette identification. On appelle les ouverts U_i les *cartes affines* de $\mathbf{P}^n$. On a $\mathbf{P}^n = \cup_i U_i$.

Proposition 2.4. *Pour tout $i = 0, \dots, n$ les applications ϕ_i et ψ_i sont continues pour la topologie de Zariski.*

Démonstration. On montre le résultat pour $i = 0$ pour faciliter les notations. Si $X \subset \mathbf{P}^n$ est un fermé de Zariski, il est défini par un nombre fini de polynômes homogènes $F_1, \dots, F_r$ et on a alors pour tout $\xi \in U_0$,

$$F_i(\xi_0, \dots, \xi_n) = 0 \Leftrightarrow F_i(1, \frac{\xi_1}{\xi_0}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_0}) = 0. \quad (76)$$

où le membre de droite est obtenue en divisant par $\xi_0^{\deg F_i}$ on a donc que $\phi_0(X) = V(f_1, \dots, f_r)$ où

$$f_i = F_i(1, t_1, \dots, t_r). \quad (77)$$

Réciproquement, si $X \subset \mathbf{A}^n$ est un fermé défini par les équations $f_1, \dots, f_r$, on définit F_i l'homogénéisé de f_i par

$$F_i(S_0, \dots, S_n) := S_0^{\deg f_i} f_i\left(\frac{S_1}{S_0}, \dots, \frac{S_n}{S_0}\right). \quad (78)$$

C'est un polynôme homogène de degré $\deg f_i$ et on a que $\psi_0(X) = V(F_1, \dots, F_r) \cap U_i$. $\square$

On considèrera à présent que $\mathbf{A}^n \subset \mathbf{P}^n$ via ψ_0 et de même pour tout ensemble algébrique X .

Lemme 2.5. *Si $X \subset \mathbf{A}^n \subset \mathbf{P}^n$ est un ensemble algébrique défini par des équations $f_1, \dots, f_r$, alors $V(F_1, \dots, F_r)$ est la clôture de X dans $\mathbf{P}^n$ pour la topologie de Zariski où F_i est l'homogénéisé de f_i . En particulier, la topologie de Zariski sur $\mathbf{A}^n$ est la topologie de Zariski de $\mathbf{P}^n$ restreinte à $\mathbf{A}^n$.*

Démonstration. On note $\bar{X}$ l'adhérence de X dans $\mathbf{P}^n$. Par la preuve de la proposition 2.4, on a que $\bar{X} \subset V(F_1, \dots, F_r)$. Réciproquement, si F est un polynôme homogène qui s'annule sur X , alors

$$f := F(1, t_1, \dots, t_n) \quad (79)$$

est un polynôme de $K[T]$ qui s'annule sur X avec $t_i = \frac{S_i}{S_0}$. On a donc que

$$f = \sum_i g_i f_i \quad (80)$$

dans $K[T]$ et on obtient que $F \in (F_1, \dots, F_r)$ en homogénéisant. $\square$

Exemple 2.6. En particulier, en appliquant ce lemme avec l'idéal $I = (1) = K[T]$, on a que $\bar{\mathbf{A}}^n = \mathbf{P}^n$. Autrement dit $\mathbf{A}^n$ est dense dans $\mathbf{P}^n$.

<+>

Définition 2.7. Une variété *quasiprojective* est un ouvert d'un fermé de $\mathbf{P}^n$. Elle est *irréductible* si elle ne s'écrit pas comme une union finie de fermés.

Tous les résultats de la partie 1.4 sont vrais pour une variété quasiprojective en recopiant les preuves mot à mot. On énonce juste le résultat suivant

Lemme 2.8. *Soit $X \subset \mathbf{P}^n$ une variété quasiprojective. X est irréductible si et seulement si $\bar{X}$ est irréductible.*

Démonstration. Si $X = Y_1 \cup Y_2$ est réunion de deux fermés, alors $\overline{X} = \overline{Y_1} \cup \overline{Y_2}$ est aussi réductible.

Réciproquement, si $\overline{X} = Y_1 \cup Y_2$, alors $Y_i \cap X$ est un fermé de X et $X = (Y_1 \cap X) \cup (Y_2 \cap X)$. $\square$

Exemple 2.9. Tout fermé de $\mathbf{P}^n$ est une variété quasiprojective. Tout ensemble algébrique est une variété quasiprojective.

Corollaire 2.10. Pour tout $n \geq 0$, $\mathbf{P}^n$ est irréductible.

Démonstration. On sait que $\mathbf{A}^n$ est irréductible par la proposition 1.44 et alors $\mathbf{P}^n = \mathbf{A}^n$ par le lemme 2.5. $\square$

2.2 Fonctions régulières

Si f est une fraction de polynôme homogène

$$f = \frac{P(S_0, \dots, S_n)}{Q(S_0, \dots, S_n)} \quad (81)$$

il n'est pas possible en général de définir la valeur de f en $x \in \mathbf{P}^n$ même si $Q(x) \neq 0$ car elle ne peut pas dépendre du représentant de x . En revanche si f est homogène de degré 0, c'est à dire si P, Q sont homogènes de même degré, alors on peut voir f comme une fonction en $x \in \mathbf{P}^n$.

Définition 2.11. Soit $X \subset \mathbf{P}^n$ une variété quasiprojective, une fonction $f : X \rightarrow K$ est *régulière* en $x \in X$ s'il existe un voisinage ouvert $U \subset X$ de x tel que on peut écrire $f = \frac{P}{Q}$ avec P, Q homogène de même degré et $Q \neq 0$ sur U . On dit que f est *régulière* si elle est régulière en tout point de $x \in X$. On note $K[X]$ pour l'anneau des fonctions régulières sur X .

Proposition 2.12. Si $X \subset \mathbf{A}^n$ est un ensemble algébrique, alors la définition des fonctions régulières est compatible avec la définition pour les ensembles algébriques.

Démonstration. On considère $X \subset \mathbf{A}^n = U_0 \subset \mathbf{P}^n$. Si f est une fonction régulière au sens des ensembles algébriques, alors f est la restriction d'un polynôme $P(t_1, \dots, t_r)$ et on a

$$f = \frac{S_0^{\deg f} P(\frac{S_1}{S_0}, \dots, \frac{S_n}{S_0})}{S_0^{\deg(f)}}. \quad (82)$$

Donc f est bien régulière au sens des variétés quasiprojectives.

Réciproquement, en déhomogénéisant on a pour tout $x \in X \subset \mathbf{A}^n$ qu'il existe un ouvert U_x de X tel que sur U_x , on a

$$q_x f = p_x \quad (83)$$

où p_x, q_x sont des fonctions régulières de X et q_x ne s'annule pas sur U . On peut supposer que (83) est vraie sur tout X en multipliant q_x et p_x par une fonction régulière qui est nulle sur $X \setminus U_x$ et qui ne s'annule pas en x , en effet dans ce cas (83) devient $0 = 0$ sur $X \setminus U_x$. Maintenant, comme dans la preuve de la proposition 1.46, par Noetherianité et le Nullstellensatz il existe $x_1, \dots, x_r \in X$ et des fonctions régulières $h_1, \dots, h_r$ tels que $\sum_i h_i q_{x_i} = 1$ et en multipliant par $f = \frac{p_{x_i}}{q_{x_i}}$, on a

$$f = \sum_i h_i p_{x_i} \quad (84)$$

et donc f est une fonction régulière au sens des ensembles algébriques. $\square$

Exercice 2.13. Montrer que $K[\mathbf{P}^n] = K$.

Exercice 2.14. Montrer que $K[\mathbf{A}^2 \setminus \{(0,0)\}] = K[x, y]$.

Définition 2.15. Soit X une variété quasiprojective. Une application $f : X \rightarrow \mathbf{A}^m$ est *régulière* si pour chaque projection $\mathbf{A}^m \rightarrow \mathbf{A}^1 = K$, la composée est une fonction régulière.

Définition 2.16. Soient $X, Y \subset \mathbf{P}^m$ des variétés quasiprojectives, un *morphisme* $f : X \rightarrow Y$ est une fonction telle que pour tout $x \in X$, il existe un ouvert U de X tel que $f(U) \subset \mathbf{A}_i^m$ et $f : U \rightarrow \mathbf{A}_i^m$ est régulière.

Exercice 2.17. Montrer que la propriété de régularité est indépendante du choix de la carte affine $\mathbf{A}_i^m$.

Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de variétés quasiprojectives, alors f induit un homomorphisme de K -algèbres

$$f^* : K[Y] \rightarrow K[X]. \quad (85)$$

On peut alors définir la notion d'isomorphisme, d'endomorphisme et d'automorphismes comme dans le cas des ensembles algébriques. On donne maintenant la définition d'une variété affine.

Définition 2.18. Une *variété affine* est une variété quasiprojective isomorphe à un ensemble algébrique $X \subset \mathbf{A}^n$. Une *variété projective* est une variété projective isomorphe à un fermé de $\mathbf{P}^n$.

Exemple 2.19. Soit $\mathbb{G}_m = \mathbf{A}^1 \setminus \{0\}$, alors $\mathbb{G}_m$ est un ensemble algébrique car isomorphe à $\{xy = 1\} \subset \mathbf{A}^2$ par le morphisme $(x, y) \mapsto x$ de réciproque $t \mapsto (t, 1/t)$.

Exercice 2.20. En utilisant l'exercice 2.14, montrer que $\mathbf{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ n'est pas un ensemble algébrique.

Lemme 2.21. *Tout point $x \in X$ d'une variété quasiprojective possède un voisinage ouvert isomorphe à une variété affine.*

Démonstration. On a $X \subset \mathbf{P}^n$, on suppose que $x \in \mathbf{A}_0^n$ ce qui est toujours possible par permutation des coordonnées homogènes. Par définition des variétés quasiprojective, on a

$$X \cap \mathbf{A}_0^n = Y \setminus Z \quad (86)$$

où $Y, Z \subset \mathbf{A}_0^n$ sont fermés. Comme $x \in Y \setminus Z$, il existe une fonction polynomiale P sur $\mathbf{A}_0^n$ telle que $P = 0$ sur Z et $P(x) \neq 0$. On note $D(P) = Y \setminus V(P)$, alors $D(P)$ est un voisinage ouvert de x dans X . On montre qu'il est affine. Considérons la sous-variété affine W de $\mathbf{A}^{n+1}$ définie par

$$f_1(t_1, \dots, t_n) = \dots = f_r(t_1, \dots, t_n) = 0 \text{ et } t_{n+1} \cdot P(t_1, \dots, t_n) = 1. \quad (87)$$

Pour tout $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in W$, on doit avoir $P(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ par la dernière équation. On a donc un morphisme

$$\phi : (x_1, \dots, x_{n+1}) \in W \mapsto (x_1, \dots, x_n) \in D(P) \quad (88)$$

qui admet l'inverse

$$\psi : (x_1, \dots, x_n) \in D(P) \mapsto \left(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{P(x_1, \dots, x_n)} \right) \in W. \quad (89)$$

□

Définition 2.22. Si X est une variété affine, alors tout ouvert de X de la forme $D(f) = X \setminus V(f)$ pour $f \in K[X]$ est appelé un *ouvert principal* de X .

Proposition 2.23. *Soit X une variété affine, tout ouvert $U \subset X$ contient un ouvert principal.*

Démonstration. Soit $Z = U \setminus X$, alors on choisit $P \in I_Z$ une fonction régulière sur X qui s'annule sur Z et on a $D(F) \subset U$. $\square$

Exercice 2.24. Montrer qu'un ouvert principal est affine et qu'on a

$$K[D(f)] = K[X][f^{-1}]. \quad (90)$$

On termine cette section par la proposition suivante. On dit qu'une propriété est *$\mathcal{P}$ locale* sur X si $\mathcal{P}$ est vraie sur X est équivalent à pour tout recouvrement ouvert $X = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ de X , $\mathcal{P}$ est vraie sur U_{α} .

Proposition 2.25. Soit X une variété quasiprojective et $Y \subset X$ une sous-partie, alors Y est fermé dans X si et seulement si pour tout recouvrement ouvert $X = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$, $U_{\alpha} \cap Y$ est fermé dans U_{α} . Autrement dit être fermé est une propriété locale.

Démonstration. Si $Y \subset X$ est fermé, alors $Y \cap U$ est fermé dans U pour tout ouvert $U \subset X$ car la topologie de U est la topologie de X restreinte à U .

Réciproquement, soit $X = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ un recouvrement ouvert tel que $Y \cap U_{\alpha}$ soit fermé dans U_{α} , alors il existe $T_{\alpha} \subset X$ fermé tel que $Y \cap U_{\alpha} = T_{\alpha} \cap U_{\alpha}$ par définition de la topologie restreinte. On a aussi que $X \setminus U_{\alpha} =: Z_{\alpha}$ est fermé dans X . On montre que

$$Y = \bigcap_{\alpha} (T_{\alpha} \cup Z_{\alpha}) \quad (91)$$

En effet, si $y \in Y$, alors pour tout α on a ou bien $y \in U_{\alpha}$ et alors $y \in U_{\alpha} \cap Y \subset T_{\alpha}$ ou bien $y \notin U_{\alpha} \Rightarrow y \in Z_{\alpha}$. Réciproquement, si $y \in \bigcap_{\alpha} (T_{\alpha} \cup Z_{\alpha})$ alors il existe β tel que $y \in U_{\beta}$. On sait que $y \in T_{\beta} \cup Z_{\beta}$ mais Z_{β} est le complémentaire de U_{β} ce qui impose $y \in T_{\beta}$. On a alors $y \in U_{\beta} \cap T_{\beta} \subset Y$. $\square$

2.3 Fonctions rationnelles

Soit X une variété quasiprojective irréductible. On définit l'ensemble $\mathcal{F}$ dont les éléments sont de la forme (U, f) avec $U \subset X$ un ouvert et $f : U \rightarrow K$ une fonction régulière. On définit la relation d'équivalence suivante sur $\mathcal{F}$:

$$(U, f) \simeq (V, g) \Leftrightarrow f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}. \quad (92)$$

Notez qu'on sait par le lemme 1.47 que deux ouverts de X ont toujours une intersection non vide.

Définition 2.26. Une fonction rationnelle sur X est une classe d'équivalence d'éléments de $\mathcal{F}$. L'ensemble des fonctions rationnelles forment un corps que l'on note $K(X)$. Le *corps des fonctions* de X .

Preuve que $K(X)$ est un corps. La somme et le produit sont donnés par

$$(U, f) \cdot (V, g) = (U \cap V, f|_{U \cap V} \cdot g|_{U \cap V}) \text{ et } (U, f) + (V, g) = (U \cap V, f|_{U \cap V} + g|_{U \cap V}). \quad (93)$$

Le seul point non trivial est que tout élément non nul de $K(X)$ est inversible. Soit $f \in K(X) \setminus 0$, il existe un ouvert $U \subset X$ tel que f est régulière sur U et $f \neq 0$. Soit $Z = V_U(f)$ le fermé dans U où f s'annule, alors f et $1/f$ sont régulières sur $U \setminus Z$ et sont inverses l'une de l'autre dans $K(X)$. $\square$

Lemme 2.27. Si X est une variété quasiprojective $U \subset X$ est un ouvert non vide, alors

$$K(U) = K(X). \quad (94)$$

Démonstration. Cela vient du fait que tout ouvert de U est l'intersection d'un ouvert de X avec U . $\square$

Lemme 2.28. Soit $X \subset \mathbf{P}^n$ une variété projective irréductible, soit O_X le sous-anneau de $K(S_0, \dots, S_n)$ constitués des éléments de la forme

$$\frac{P}{Q} \quad (95)$$

où P, Q sont homogènes de même degrés et $Q \notin I_X$ et soit $\mathcal{M}_X$ l'idéal engendré par I_X dans O_X , alors $K(X)$ est isomorphe au corps $O_X/\mathcal{M}_X$.

Démonstration. On a un morphisme d'anneaux $O_X \rightarrow K(X)$. Maintenant, si $\frac{P}{Q}$ est dans le noyau, alors il existe un ouvert U où $P = 0$. Mais par la proposition 1.48, on a que $P = 0$ sur X , donc $\frac{P}{Q} \in \mathcal{M}_X$. Réciproquement, si f est une fonction régulière sur U , alors

$$f = \frac{P}{Q} \quad (96)$$

où P, Q sont des fractions rationnelles homogènes de même degré et $Q \notin I_U$. Mais alors $Q \notin I_X$ car $U \subset X$ est ouvert et le morphisme d'anneaux est surjectif. $\square$

Lemme 2.29. Soit X une variété affine, alors la définition des fonctions rationnelles pour les variétés affines et quasiprojectives coïncident.

Démonstration. Si P, Q sont des fonctions régulières sur X , alors $\frac{P}{Q}$ est régulière sur $D(Q)$ par la proposition 2.12 donc $\frac{P}{Q}$ est une fonction rationnelle au sens des variétés quasiprojectives. Réciproquement, soit U un ouvert de X et $f \in K[U]$. Par la proposition 2.23, on peut supposer que $U = D(Q)$ pour $Q \in K[X]$ et alors par l'exercice 2.24, on a qu'il existe $P \in K[X]$ tel que

$$f = \frac{P}{Q}. \quad (97)$$

□

Définition 2.30. Soient X, Y des variétés quasiprojectives avec X irréductible, une *application rationnelle* $f : X \dashrightarrow Y$ est une classe d'équivalence d'éléments (U, f) où $U \subset X$ est un ouvert et $f : U \rightarrow Y$ est un morphisme pour la relation d'équivalence

$$(U, f) \simeq (V, g) \Leftrightarrow f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}. \quad (98)$$

Si $f : X \dashrightarrow Y$ est une application rationnelle, alors le plus grand ouvert sur lequel f est défini est

$$U_f = \bigcup_{f \sim (V, g)} V \quad (99)$$

On appelle cet ouvert le *domaine de définition* de f ou son *ouvert de définition*. Son complémentaire est un fermé appelé le *lieu d'indétermination* de f .

On appelle $f(U_f) \subset Y$ l'*image* de X par f . Une application rationnelle est *dominante*, si son image est dense.

Proposition 2.31. Pour X, Y des variétés affines, la définition des applications rationnelles $f : X \dashrightarrow Y$ pour les ensembles algébriques et les variétés quasiprojectives coïncident.

Démonstration. Découle du lemme 2.29. □

Définition 2.32. Soient X, Y des variétés quasiprojectives irréductibles. Une application $f : X \dashrightarrow Y$ est *birationnelle* si elle est dominante et s'il existe $g : Y \dashrightarrow X$ dominante telle que

$$g \circ f = \text{id}_X \text{ et } f \circ g = \text{id}_Y. \quad (100)$$

On dit que deux variétés quasiprojectives sont *birationnelles*, s'il existe une application birationnelle entre les deux.

Une variété quasiprojective est dite *rationnelle* si elle est birationnelle à $\mathbf{P}^n$.

Proposition 2.33. *Soient X, Y des variétés quasiprojectives irréductibles, tout application rationnelle dominante $f : X \dashrightarrow Y$ induit un morphisme de corps appelé tiré-en-arrière $f^* : K(Y) \rightarrow K(X)$. Réciproquement, tout K -morphisme de corps $K(Y) \rightarrow K(X)$ provient d'un morphisme de tiré-en-arrière.*

En particulier, deux variétés quasiprojectives irréductibles sont birationnelles si et seulement elles ont même corps de fonctions.

Démonstration. Par le lemme 2.21, il existe des ouverts affines $U \subset X$ et $V \subset Y$. Par irréductibilité, l'ensemble des applications rationnelles dominantes $f : X \dashrightarrow Y$ est le même que l'ensemble des applications rationnelles dominantes $g : U \dashrightarrow V$. Par définition du corps des fonctions, on a $K(U) = K(X)$ et $K(V) = K(Y)$ et le résultat découle de la proposition 1.50 et 1.52. $\square$

2.4 Dimension

De la même façon que dans le cadre affine, on définit la dimension d'une variété quasiprojective X comme la plus grande longueur d'une chaîne de fermés strictement croissante de X . Attention, contrairement au cas affine, la proposition 1.54 n'est pas vraie en quasiprojectif, prenez par exemple $X = \mathbf{P}^n$.

Lemme 2.34. *Soit X une variété quasiprojective irréductible, et (U_i) un recouvrement ouvert de X , c'est à dire $X = \bigcup_i U_i$, alors*

$$\dim X = \sup_i \dim U_i \quad (101)$$

Démonstration. Comme $U_i \subset X$, on a $\dim X \geq \sup_i \dim U_i$. Réciproquement, si $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_n$ une suite de fermés irréductibles de longueur maximale de X . Il existe $U \in (U_i)$ tel que $Z_0 \cap U \neq \emptyset$. La suite $U \cap Z_0 \subsetneq U \cap Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq U \cap Z_n$ est une suite de fermés irréductibles de U . En effet, $U \cap Z_j$ est dense dans Z_j par irréductibilité et donc si $U \cap Z_j = U \cap Z_{j+1}$ on aurait $Z_j = Z_{j+1}$, c'est absurde. Donc $\dim X \leq \dim U$ et on a le résultat. $\square$

Proposition 2.35. *Pour toute variété irréductible quasiprojective X , on a*

$$\dim X = \text{tr. deg } K(X). \quad (102)$$

En particulier, si $U \subset X$ est un ouvert, alors $\dim U = \dim X$.

Démonstration. Par le lemme 2.21, on peut trouver un recouvrement de X par ouvert affine. Or pour tout ouvert affine U par la proposition 1.54, on a $\dim U = \text{tr. deg } K(U) = \text{tr. deg } K(X)$, car $K(X) = K(U)$. Par le lemme 2.34, on a le résultat. $\square$

Corollaire 2.36. *Pour tout $n \geq 0$, on a $\dim \mathbf{P}^n = n$.*

Démonstration. On utilise la proposition 2.35 avec $\mathbf{A}^n \subset \mathbf{P}^n$. $\square$

Corollaire 2.37. *Soit $f : X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle dominante, alors $\dim X \geq \dim Y$.*

Démonstration. On sait que f induit une extension de corps $f^* : K(Y) \hookrightarrow K(X)$ par la proposition et donc $\text{tr. deg } K(X)/K \geq \text{tr. deg } K(Y)/K$. $\square$

Définition 2.38. Soit X une variété quasiprojective irréductible, et Y une sous-variété fermée irréductible. La *codimension* de Y dans X est $\text{codim}(Y, X) = \dim X - \dim Y$.

On admettra le fait suivant (voir [Har77] définition p.86 et exercice II.3.20 (d)).

Proposition 2.39. *La codimension de Y dans X est égale à*

$$\max \{n \geq 0 : \exists Y_0 = Y \subsetneq Y_1 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_n = X, Y_i \text{ irréductibles}\} \quad (103)$$

En particulier, une variété quasiprojective contient des sous-variétés de toutes codimension.

Proposition 2.40 (Dimension des fibres). *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme dominant, alors pour tout $y \in f(X)$*

$$\dim f^{-1}(y) \geq \dim X - \dim Y. \quad (104)$$

Démonstration. Soit Z une composante irréductible de $f^{-1}(y)$, alors on montre que $\text{codim}(Z, X) \geq \dim Y = \text{codim}(y, Y)$. On montre en fait de façon plus général que si $Y' \subset Y$ est un fermé irréductible avec $f(X) \cap Y' \neq \emptyset$ et $Z \subset f^{-1}(Y')$ est une composante irréductible, alors $\text{codim}(Z, X) \leq \text{codim}(Y', Y)$. On raisonne par récurrence sur $\text{codim}(Z, X)$. Si elle vaut 0, alors $Z = X$ et il n'y a rien à faire. Soit $c = \text{codim}(Z, X)$ et $Z_1 \supset Z$ un fermé irréductible de codimension $c - 1$ (Z_1 existe par la proposition 2.39), alors on a $\bar{f}(Z) \subsetneq \bar{f}(Z_1)$ car sinon ces deux ensembles irréductibles seraient égaux et $Z \subset Z_1$ ne serait pas une composante irréductible de $f^{-1}(Y')$. Donc $\text{codim}(Z, X) = \text{codim}(Z_1, X) + 1 \leq \text{codim}(\bar{f}(Z_1), Y) + 1 \leq \text{codim}(Y', Y)$. $\square$

3 Produits et morphismes de variétés quasiprojectives

3.1 Produits

On a vu la définition du produit de variétés affines dans la section 1, on sait que c'est encore une variété affine. Soient X, Y des variétés quasiprojectives, on définit le produit $X \times Y$ par

$$\{(x, y) : x \in X, y \in Y\}. \quad (105)$$

Il n'est pas clair à priori que $X \times Y$ soit encore une variété quasiprojective.

Théorème 3.1. *Soient X, Y des variétés quasiprojectives, il existe à isomorphisme près une unique structure de variété quasiprojective sur $X \times Y$ telle que pour tout ouvert $U \subset X, V \subset Y, U \times V \subset X \times Y$ est un ouvert et si U, V sont affines, alors c'est un ouvert affine isomorphe à $U \times V$ en tant que variété affine.*

Preuve de l'unicité. On prouve d'abord l'unicité, soit $\phi : X \times Y \hookrightarrow \mathbf{P}^N$ et $\psi : X \times Y \hookrightarrow \mathbf{P}^M$ deux fonctions injectives dont l'image est une variété quasiprojective, alors $\psi \circ \phi^{-1}$ induit un isomorphisme entre $\phi(X \times Y)$ et $\psi(X \times Y)$. En effet, il suffit de montrer que pour tout $(x, y) \in X \times Y$, il existe des ouverts $(x, y) \in W_1 \subset \phi(X \times Y)$ et $(x, y) \in W_2 \subset \psi(X \times Y)$ tels que $\psi \circ \phi^{-1}$ induit un isomorphisme de W_1 vers W_2 . Pour se faire on prend $U \subset X$ un voisinage ouvert affine de $x \in X$ et $V \subset Y$ un voisinage ouvert affine de $y \in Y$. Alors $W_1 = \phi(U \times V)$ et $W_2 = \psi(U \times V)$ conviennent car ils sont tous les deux isomorphes à $U \times V$. $\square$

Pour l'existence, il suffit de construire le produit de $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$. On pose

$$N = (n+1)(m+1) - 1. \quad (106)$$

On définit

$$\phi([u_0 : \dots : u_n], [v_0 : \dots : v_m]) = [u_i v_j : i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m] \quad (107)$$

Proposition 3.2. *L'application ϕ est injective et d'image la sous-variété de $\mathbf{P}^N$ d'équation*

$$w_{ij} w_{kl} = w_{kj} w_{il}, \quad \forall 0 \leq i, k \leq n, 0 \leq j, l \leq m \quad (108)$$

où w_{ij} sont les coordonnées homogènes sur $\mathbf{P}^N$ de sorte que $w_{ij}(\phi(u, v)) = u_i v_j$.

De plus, si $\mathbf{A}_{ij}^N$ est une des cartes affines de $\mathbf{P}^N$, alors $W \cap \mathbf{A}_{ij}^N$ est isomorphe à $\mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^m$.

Démonstration. Il est facile de vérifier que l'image de ϕ est contenue dans W où $W \subset \mathbf{P}^N$ est la sous-variété projective définie par les équations données par (108).

Soient $(x, y) \in X \times Y$, on peut supposer que $w_{00}(\phi(x, y)) \neq 0$, c'est à dire $x_0 y_0 \neq 0$, alors pour tout $1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m$, on a

$$y_l = \frac{w_{0l}}{x_0}, \quad x_k = \frac{w_{k0}}{y_0}. \quad (109)$$

De sorte que

$$x = [w_{00} : w_{10} : \dots : w_{n0}], \quad y = [w_{00} : w_{01} : \dots : w_{0m}]. \quad (110)$$

Ce qui prouve que ϕ est injective et montre aussi que l'image de ϕ est bien W , car on vient de construire un antécédent de W par ϕ .

Maintenant, on montre la dernière assertion pour $i = j = 0$ (les autres cas sont analogues mais plus fastidieux à rédiger). On considère $W \cap \mathbf{A}_{00}^N$. Ainsi, on impose $w_{ij} = 1$ dans (108) ce qui signifie aussi qu'on impose $x_0 = y_0 = 1$ dans $\mathbf{A}_0^n$ et $\mathbf{A}_0^m$. Cela donne

$$w_{kl} = w_{k0} \cdot w_{0l} = x_k \cdot y_l \quad (111)$$

pour $0 \leq k \leq n, 0 \leq l \leq m$. En particulier, $w_{0l} = y_l$ et $w_{k0} = x_k$. Ainsi, $K[W \cap \mathbf{A}_{00}^N]$ est isomorphe à

$$K[x_1, \dots, x_n] \times K[y_1, \dots, y_m] = K[\mathbf{A}_0^n \times \mathbf{A}_0^m]. \quad (112)$$

□

L'application ϕ est appelée le *plongement de Segre* et son image est appelée la *variété de Segre*. On peut caractériser les sous-variétés projectives de $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$ par le plongement de Segre.

Théorème 3.3. *Une sous-variété de $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$ est projective si et seulement si elle définie par des équations de la forme*

$$G_k(u_0, \dots, u_n; v_0, \dots, v_m), \quad k = 1, \dots, r \quad (113)$$

où chaque G_k est un polynôme homogène en les variables $u_0, \dots, u_n$ de degré d_u et homogène en les variables $v_0, \dots, v_m$ de degré d_v . On appelle un tel polynôme un polynôme bihomogène.

De même, une sous variété de $\mathbf{P}^n \times \mathbf{A}^m$ est fermée si et seulement si elle est définie par des équations de la forme

$$G_k(u_0, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m) \quad (114)$$

où G_k est homogène en les variables $u_0, \dots, u_n$.

Démonstration. On montre le résultat pour $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$. Soit W la variété de Segre dans $\mathbf{P}^N$. Une sous-variété fermée $Z \subset W$ est définie par les équations de W et un nombre fini d'équation homogènes

$$G_k(w_{00}, \dots, w_{nm}) = 0, \quad k = 1, \dots, r. \quad (115)$$

En substituant $w_{ij} = u_i v_j$, on voit que G_k a la forme (113) avec même degré d'homogénéité pour $u_0, \dots, u_n$ et $v_0, \dots, v_m$. Réciproquement, tout polynôme bihomogène de même degré pour les variables u et v est un polynôme homogène en les variables w_{ij} après la substitution $w_{ij} = u_i v_j$.

Maintenant, si $Z \subset W$ est donnée par un système d'équations de la forme (113), alors soit $k = 1, \dots, r$, on note d_u, d_v le degré d'homogénéité de G_k par rapport aux variables $u_0, \dots, u_n$ et $v_0, \dots, v_m$ respectivement. Si $d_u > d_v$, alors le système d'équation $G_k = 0$ est équivalent au système défini par les équations

$$\forall j = 0, \dots, m, \quad v_j^{d_u - d_v} G_k = 0. \quad (116)$$

qui est bien une sous-variété fermée de $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$ par ce qui précède. $\square$

Soit X une variété quasiprojective, la *diagonale* Δ_X de $X \times X$ est le sous-ensemble dont les éléments sont de la forme (x, x) pour $x \in X$.

Corollaire 3.4. *Pour toute variété quasiprojective X , la diagonale Δ_X est fermée dans $X \times X$.*

Démonstration. On suppose $X \subset \mathbf{P}^n$, alors

$$\Delta_X = \Delta_{\mathbf{P}^n} \cap (X \times X). \quad (117)$$

Donc il suffit de montrer que $\Delta_{\mathbf{P}^n} =: \Delta$ est fermée dans $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^n$ et c'est le cas car Δ est définie par les équations

$$u_i v_j = u_j v_i, \quad \forall 0 \leq i, j \leq n \quad (118)$$

où $u_0, \dots, u_n$ et $v_0, \dots, v_n$ sont les coordonnées homogènes sur le premier et le deuxième $\mathbf{P}^n$ respectivement. $\square$

3.2 Image d'une variété projective par un morphisme

Définition 3.5. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés quasiprojectives. On définit le *graphe de f* comme le sous-ensemble $\Gamma_f \subset X \times Y$ par

$$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}. \quad (119)$$

Proposition 3.6. *Le graphe Γ_f d'un morphisme de variétés quasiprojectives $f : X \rightarrow Y$ est une sous-variété fermée de $X \times Y$.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat quand $Y = \mathbf{P}^m$. En effet, si $Y \subset \mathbf{P}^m$, alors f induit un morphisme $\bar{f} : X \rightarrow \mathbf{P}^m$ et $\Gamma_f = \Gamma_{\bar{f}} \subset X \times Y \subset X \times \mathbf{P}^m$. Soit $i : \mathbf{P}^m \rightarrow \mathbf{P}^m$ le morphisme identité, on considère

$$(f, i) : X \times \mathbf{P}^m \rightarrow \mathbf{P}^m \times \mathbf{P}^m. \quad (120)$$

Alors Γ_f est l'image réciproque de la diagonale $\Delta_{\mathbf{P}^m}$ par (f, i) et le résultat découle du corollaire 3.4. $\square$

Proposition 3.7. *Soit X une variété projective et Y une variété quasiprojective, la projection sur la seconde coordonnée $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ envoie fermés sur fermés.*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat lorsque $X = \mathbf{P}^n$, en effet si $X \subset \mathbf{P}^n$ est fermé alors tout fermé de $X \times Y$ est un fermé de $\mathbf{P}^n \times Y$. Ensuite, vu que le fait d'être fermé est une propriété *locale*, c'est à dire qu'une partie $Z \subset Y$ est fermée si et seulement si pour tout ouvert $U \subset Y$, $Z \cap U$ est fermé dans U , il suffit par le lemme 2.21 de montrer le résultat quand Y est affine. Or si $Y \subset \mathbf{A}^m$ est fermé, alors $Z \subset Y$ est fermé si et seulement si Z est fermé dans $\mathbf{A}^m$. Donc on peut aussi supposer que $Y = \mathbf{A}^m$.

Soit Z un fermé de $\mathbf{P}^n \times \mathbf{A}^m$. Par le théorème 3.3, Z est défini par un système d'équations

$$G_k(u; y), \quad k = 1, \dots, r \quad (121)$$

où u est un système de coordonnées homogènes pour $\mathbf{P}^n$ et y un système de coordonnées affines pour $\mathbf{A}^m$ et G_k est homogène en u . Soit $p : Z \rightarrow \mathbf{A}^m$ la restriction de la projection à Z . Pour $y_0 \in \mathbf{A}^m$, $p^{-1}(y_0)$ est le fermé de $\mathbf{P}^n$ défini par

$$G_k(u; y_0) = 0, \quad k = 1, \dots, r. \quad (122)$$

Donc $y_0 \in p(Z)$ si et seulement si le système (122) a une solution dans $\mathbf{P}^n$. Il faut donc montrer que l'ensemble des $y_0 \in \mathbf{A}^m$ tels que le système (122) a une solution dans $\mathbf{P}^n$ est fermé dans $\mathbf{A}^m$. Par le lemme 2.3, le système (122) a une solution dans $\mathbf{P}^n$ si et seulement si l'idéal engendré par $G_k(u; y_0)$ pour $k = 1, \dots, r$ ne contient pas I_s pour tout $s > 0$ où I_s est l'idéal engendré par tous les monômes de degré s . Il suffit donc de montrer que pour tout $s > 0$, l'ensemble $T_s \subset \mathbf{A}^m$ de point $y_0 \in \mathbf{A}^m$ tels que

$$I_s \not\subset \langle G_1(u; y_0), \dots, G_r(u; y_0) \rangle =: I_{y_0} \quad (123)$$

est fermé. Soit d_k le degré d'homogénéité de G_k par rapport à u . Soient $(M^\alpha)_\alpha$ l'ensemble des monômes de degré s , la condition $I_s \subset I_{y_0}$ signifie que

$$\forall \alpha, \quad M^\alpha = \sum_{k=1}^r G_k(u; y_0) F_k^\alpha(u) \quad (124)$$

avec F_k^α homogène de degré $s - d_k$. On note $(N_k^\beta)_\beta$ l'ensemble des monômes de degré $s - d_k$ pour $k = 1, \dots, r$. Donc (124) est équivalent au fait que le K espace vectoriel engendré par les $G_k(u; y_0) N_k^\beta$ est égal au K espace vectoriel des polynômes homogènes de degré s que l'on note S . Donc $I_s \not\subset I_{y_0}$ est équivalent au fait que cet espace vectoriel n'est pas S tout entier. Pour trouver une condition polynomiale sur $\mathbf{A}^m$, on écrit

$$\forall \beta, \quad G_k(u; y_0) N_k^\beta = \sum_{\alpha} a_{\alpha\beta}(y_0) M^\alpha. \quad (125)$$

On obtient une matrice $a_{\alpha\beta}$ dont les coefficients sont des polynômes en y_0 . Pour que la famille $(G_k(u; y_0) N_k^\beta)$ n'engendre pas tout S il faut et il suffit que tous les mineurs de taille $\dim S \times \dim S$ soit nuls. Cela donne les équations qui définissent T_s . $\square$

Théorème 3.8. *Soit X une variété projective et Y une variété quasiprojective, alors si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme, $f(X)$ est fermée dans Y .*

Démonstration. L'image $f(X)$ est égale à $p_2(\Gamma_f)$ où Γ_f est le graphe de f et $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ est la projection sur le facteur Y . Le résultat provient des propositions 3.6 et 3.7. $\square$

Corollaire 3.9. *Si X est une variété projective irréductible, alors $K[X] = K$.*

Démonstration. Une fonction régulière correspond à un morphisme $f : X \rightarrow \mathbf{A}^1$. Comme X est irréductible, son image l'est également et par le théorème 3.8, $f(X)$ est un fermé de $\mathbf{A}^1$. Comme $\dim \mathbf{A}^1 = 1$, on a $f(X) = \mathbf{A}^1$ ou bien $f(X)$ est un point. Si $f(X) = \lambda \in K$, alors f correspond à la fonction régulière constante égale à λ . On montre que $f(X) = \mathbf{A}^1$ est impossible. Sinon, f s'étend en un morphisme $f : X \rightarrow \mathbf{A}^1 \subset \mathbf{P}^1$ et l'image $f(X) = \mathbf{A}^1 \subset \mathbf{P}^1$ ne serait pas un fermé de $\mathbf{P}^1$, c'est absurde. $\square$

Corollaire 3.10. *Tout morphisme $X \rightarrow Y$ où X est projective et Y est affine envoie X sur un point.*

Démonstration. Cela découle directement du corollaire 3.9. $\square$

Dans tout le reste de ces notes, une variété dénotera une variété quasiprojective.

Chapitre II

Propriétés locales

1 Anneau local en un point

Soit X une variété et $x \in X$

Définition 1.1. Un *germe* de fonctions régulières en x est une classe d'équivalence d'éléments de la forme (U, f) où U est un voisinage ouvert de x et $f \in K[U]$ pour la relation d'équivalence suivante

$$(U, f) \sim (V, g) \Leftrightarrow f|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}. \quad (1)$$

L'ensemble des germes de fonctions régulières en x est un anneau appelé *l'anneau local* de X en x et on le note $O_{X,x}$.

Un anneau est dit *local* s'il admet un unique idéal maximal.

Remarque 1.2. Si X est irréductible, alors on a une inclusion naturelle $O_{X,x} \subset K(X)$.

Proposition 1.3. Si X est une variété affine et $x \in X$, alors

$$O_{X,x} = K[X]_{\mathfrak{m}(x)} \quad (2)$$

le localisé de $K[X]$ par rapport à l'idéal maximal $\mathfrak{m}(x)$ des fonctions qui s'annulent en x .

En particulier, pour toute variété Y , $O_{Y,y}$ est un anneau local Noetherien. Si $\mathfrak{m}_{Y,y}$ est son idéal maximal alors $O_{Y,y}/\mathfrak{m}_{Y,y} = K$.

Démonstration. Soit $(U, f) \in \mathcal{O}_{X,x}$, alors on peut supposer que $U = D(Q)$ est un ouvert principal par la proposition 2.23, alors on a

$$f = \frac{P}{Q^d} \quad (3)$$

avec $P \in K[X]$ et $Q \in K[X] \setminus \mathfrak{m}(x)$ car $x \in D(Q)$ pour une certaine puissance d . Réciproquement tout élément de $K[X]_{\mathfrak{m}(x)}$ définit un germe de fonctions régulières en x . On note $\mathfrak{m}_{X,x}$ l'idéal engendré par $\mathfrak{m}(x)$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$, c'est un idéal maximal car tout élément qui n'est pas dans cet idéal est inversible dans $\mathcal{O}_{X,x}$ ce qui prouve également que l'anneau $\mathcal{O}_{X,x}$ est local. En fait, on a le morphisme d'évaluation

$$\text{ev}_x : K[X] \rightarrow K \quad (4)$$

qui est surjectif et son noyau est exactement l'idéal maximal $\mathfrak{m}(x)$. On peut donc étendre $\text{ev}_x : K[X]_{\mathfrak{m}(x)} \rightarrow K$ et $\mathfrak{m}_{X,x}$ est le noyau de ce morphisme, on retrouve le fait que c'est un idéal maximal et que $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} = K$.

Maintenant si Y est une variété quasiprojective, alors pour tout $y \in Y$ on a $\mathcal{O}_{Y,y} = \mathcal{O}_{U,y}$ pour U un voisinage ouvert affine de y d'où le résultat. $\square$

Proposition 1.4. *Soit X une variété quasiprojective irréductible, alors pour tout $x \in X$, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est de dimension $\dim X$.*

Démonstration. On peut supposer que X est affine par la proposition 2.35. On a alors que $\mathcal{O}_{X,x} = K[X]_{\mathfrak{m}(x)}$ où $\mathfrak{m}(x)$ est l'idéal maximal défini par x dans $K[X]$. On a alors que la dimension de $\mathcal{O}_{X,x}$ est égale à la hauteur de $\mathfrak{m}(x)$ et par la proposition 1.54, on a

$$\dim K[X] = \text{hauteur } \mathfrak{m}(x) + \dim K[X]_{\mathfrak{m}(x)} \quad (5)$$

et comme $K[X]_{\mathfrak{m}(x)} = K$ on conclut. $\square$

2 Espace tangent et cotangent

On définit dans cette partie la notion d'espace tangent et cotangent en un point d'une variété algébrique. C'est la notion analogue à l'espace tangent en géométrie différentielle. On verra d'abord une première définition pour les variétés affines qui dépendra d'un plongement dans un espace affine puis on montrera que cette construction est en fait intrinsèque

2.1 Une première définition de l'espace tangent

Soit $X \subset \mathbf{A}^n$ une variété affine et $x \in X$. On définit l'espace tangent de X en x comme l'union de toutes les droites de $\mathbf{A}^n$ tangentes à X en x . Par changement de coordonnées on peut supposer que $x = 0$ est l'origine de $\mathbf{A}^n$. Une droite L de $\mathbf{A}^n$ passant par 0 est alors de la forme

$$L = \{ta : t \in K\} \quad (6)$$

avec $a \in \mathbf{A}^n$ fixé. Soit $F_1, \dots, F_r$ un système d'équations de X . L'ensemble $X \cap L$ est par définition le lieu défini par l'équation

$$F_1(ta) = \dots = F_r(ta) = 0. \quad (7)$$

Chaque polynôme est vu comme un polynôme à une variable en t , ce lieu de zéro est le lieu de zéro du PGCD de ces polynômes qu'on note G . On a nécessairement que $t = 0$ est une racine de G car $x \in X \cap L$.

Définition 2.1. La multiplicité d'intersection de L avec X en x est la multiplicité de la racine $t = 0$ dans le polynôme G . Si $G = 0$ (i.e $L \subset X$) on définit la multiplicité comme $+\infty$.

Une droite est *tangente* en x si cette multiplicité est ≥ 2

Remarque 2.2. Si I_X est l'idéal de définition de X , alors le polynôme G est en fait un générateur de l'idéal

$$\{F(ta) : F \in I_X\} \quad (8)$$

et donc la multiplicité ne dépend pas du choix des générateurs.

Exemple 2.3. Soit $C = \{y = x^2\}$ et $L = y = 0$, alors L est tangente à C en l'origine car

$$L = \{t(1, 0) : t \in K\} \quad (9)$$

et

$$(y - x^2)(t, 0) = -t^2. \quad (10)$$

On cherche maintenant à trouver un critère pour savoir si L est tangente à X en x . Avec nos choix de coordonnées $x = 0$ est l'origine de $\mathbf{A}^n$ donc si $F_1, \dots, F_r$ sont des équations de X , elles ont un terme constant nul. On écrit $F_i = A_i + G_i$ où A_i est le terme linéaire de F_i et G_i la partie de degré ≥ 2 , alors

$$F_i(ta) = tA_i(a) + G_i(ta) \quad (11)$$

et $G_i(ta)$ est divisible par t^2 . Donc $F_i(ta)$ est divisible par t^2 si et seulement si $A_i(a) = 0$. La condition de tangence est donc

$$A_1(a) = \cdots = A_r(a) = 0. \quad (12)$$

Définition 2.4. L'espace tangent de $x \in X \subset \mathbf{A}^n$ est le sous-espace de $\mathbf{A}^n$ union des droites tangentes à X en x . On le note $\Theta_{X,x}$.

Définition 2.5. Si $X \subset \mathbf{A}^n$ est donné par des équations $f_1, \dots, f_r$, alors on définit la *matrice Jacobienne* de X en P par rapport à $(f_1, \dots, f_r)$ comme

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq n}}. \quad (13)$$

L'espace tangent de X en x est alors $(x+)$ le noyau de cette matrice, il ne dépend pas du choix des générateurs.

Remarque 2.6. L'équation (12) montre que $\Theta_{X,x}$ est un sous-espace affine de $\mathbf{A}^n$.

Exemple 2.7. L'espace tangent de $\mathbf{A}^n$ en tout point est $\mathbf{A}^n$.

Si $F \in K[T]$ et $X = \{F = 0\} \subset \mathbf{A}^n$ l'hypersurface associée telle que $0 \in X$, alors le terme linéaire de F est

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(0) x_i \quad (14)$$

et on voit que si $A \neq 0$, $\dim \Theta_{X,0} = n - 1$ et sinon $\Theta_{X,0} = \mathbf{A}^n$.

2.2 Une définition intrinsèque de l'espace tangent

La définition de l'espace tangent vu dans la partie précédente a le défaut que les définitions dépendent de l'espace affine ambiant dans lequel est plongé X . En particulier, il n'est pas clair que l'espace tangent est préservé par isomorphisme. On va montrer qu'en fait la définition est bien intrinsèque et on pourra alors la généraliser pour toute variété.

Soit $F \in K[T]$ un polynôme et $x \in \mathbf{A}^n$, F a un développement de Taylor en x :

$$F = F(x) + F^{(1)}(T) + F^{(2)}(T) + \cdots + F^{(d)}(T). \quad (15)$$

où $F^{(i)}(T)$ est la composante homogène de degré i . La partie linéaire $F^{(1)}(T)$ est la *différentielle* de F en x , on la note $d_x F$ et elle est égale à

$$d_x F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) (T_i - x_i). \quad (16)$$

On peut vérifier que

$$d_x(F + G) = d_x(F) + d_x(G), \quad (17)$$

$$d_x(FG) = Fd_x(G) + Gd_x(F). \quad (18)$$

Avec ces notations, la condition de tangence de (12) devient

$$d_x F_1 = \cdots d_x F_r = 0 \quad (19)$$

où $F_1, \dots, F_r$ sont des équations définissant X .

On veut maintenant définir $d_x g$ pour g dans $K[X]$ de sorte que (17) et (18) soient vérifiées. En fait $d_x g$ va être défini comme une forme linéaire sur l'espace tangent de X en x . En effet, soit $G \in K[T]$ tel que $G|_X = g$, alors on définit

$$d_x g = (d_x G)|_{\Theta_{X,x}}. \quad (20)$$

Cette définition est correcte car deux représentants de g diffèrent d'un élément de I_X de la forme $A_1 F_1 + \cdots + A_r F_r$ et comme $F_1(x) = \cdots = F_r(x) = 0$, on a

$$d_x(A_1 F_1 + \cdots + A_r F_r) = A_1(x) d_x F_1 + \cdots + A_r(x) d_x F_r \quad (21)$$

et par (19),

$$d_x(A_1 F_1 + \cdots + A_r F_r)|_{\Theta_{X,x}} = 0. \quad (22)$$

Définition 2.8. La forme linéaire $d_x g$ est appelé la *différentielle* de g en X .

On a donc un homomorphisme linéaire $d_x : K[X] \rightarrow \Theta_{X,x}^*$ où $\Theta_{X,x}^*$ est le dual de $\Theta_{X,x}$. Comme pour tout $\alpha \in K$, $d_x \alpha = 0$ on peut se restreindre à

$$d_x : \mathfrak{m}(x) \rightarrow \Theta_{X,x}^* \quad (23)$$

où $\mathfrak{m}(x) \subset K[X]$ est l'idéal maximal défini par x .

Théorème 2.9. L'application d_x induit un isomorphisme linéaire entre $\mathfrak{m}(x)/\mathfrak{m}(x)^2$ et $\Theta_{X,x}^*$.

Démonstration. On a que l'image de d_x est tout $\Theta_{X,x}^*$, en effet toute forme linéaire ϕ sur $\Theta_{X,x}^*$ s'étend une forme linéaire G sur $\mathbf{A}^n$ et on a $d_x G = \phi$. On montre que le noyau est bien $\mathfrak{m}(x)^2$, on peut supposer que $x = 0$ est l'origine de $\mathbf{A}^n$. Soit $g \in \mathfrak{m}(x)$ tel que $d_x g = 0$ et soit $G \in K[T]$ induisant g . On a que $d_x G$ est nulle sur $\Theta_{X,x}^*$, donc par (19) on a

$$d_x G = \lambda_1 d_x F_1 + \cdots + \lambda_r d_x F_r \quad (24)$$

avec $\lambda_i \in K$ pour $F_1, \dots, F_r$ des équations définissant X . Soit $G_1 = G - \lambda_1 F_1 - \dots - \lambda_r F_r$. On a que G_1 n'a pas de terme constant et pas de terme linéaire. Donc $G_1 \in (T_1, \dots, T_n)^2$ où $T_1, \dots, T_n$ sont les coordonnées affines de $\mathbf{A}^n$. Si on note $t_i = T_i|_X$, alors $g \in (t_1, \dots, t_n)^2 = \mathfrak{m}(x)^2$. $\square$

On appelle $\mathfrak{m}(x)/\mathfrak{m}(x)^2$ l'espace *cotangent* de X en x . Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de variétés affines, alors si $f(x) = y$ on a un homomorphisme de K -algèbres $f^* : K[Y] \rightarrow K[X]$ avec $f^*(\mathfrak{m}(y)) \subset \mathfrak{m}(x)$ et $f^*(\mathfrak{m}(y)^2) \subset \mathfrak{m}(x)^2$. On a donc une application

$$f^* : \mathfrak{m}(y)/\mathfrak{m}(y)^2 \rightarrow \mathfrak{m}(x)/\mathfrak{m}(x)^2. \quad (25)$$

Par le théorème 2.9, on a donc que f induit une application linéaire

$$d_x f : \Theta_{X,x} \rightarrow \Theta_{Y,y}. \quad (26)$$

Cette application est appelée la *différentielle* de f en x .

Corollaire 2.10. *Si $X \rightarrow Y$ est un isomorphisme de variétés affines, alors les espaces tangents en chaque point sont isomorphes par cet isomorphisme.*

On a donc bien une définition *locale et intrinsèque* de l'espace tangent d'une variété en un point.

Théorème 2.11. *L'espace tangent $\Theta_{X,x}$ d'une variété affine X en un point x est un invariant local, c'est l'espace vectoriel dual du K -espace vectoriel $\mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}^2$ où ici $\mathfrak{m}_{X,x}$ est l'idéal de l'anneau local en x .*

Démonstration. On va montrer comment déterminer Θ_x en fonction de l'anneau local O_x . Si F/G est une fonction rationnelle avec $F, G \in K[T]$ avec $G(x) \neq 0$, alors on a

$$d_x(F/G) = \frac{G(x)d_x F - F(x)d_x G}{G^2(x)}. \quad (27)$$

On peut voir tout élément $f \in O_x$ comme la restriction d'une fonction rationnelle F/G et on peut alors définir la différentielle de f comme

$$d_x f = d_x(F/G)|_{\Theta_x}. \quad (28)$$

Le théorème 2.9 s'énonce de la même manière avec l'idéal maximal $\mathfrak{m}_x$ de l'anneau local O_x et on a que d_x induit un isomorphisme K -linéaire $d_x : \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \simeq \Theta_x^*$. $\square$

Définition 2.12. Soit X une variété quasiprojective et $x \in X$, l'espace tangent de x en X est défini comme l'espace vectoriel dual du K -espace vectoriel $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

3 Points lisses

Dans cette partie on va étudier la dimension que peut avoir l'espace tangent d'une variété en un point et définir la notion de points lisses. C'est une notion locale, alors on donnera d'abord une définition pour les variétés affines qui à priori dépendra du plongement dans $\mathbf{A}^n$ avant de montrer que c'est une définition intrinsèque.

Définition 3.1. Soit $X \subset \mathbf{A}^n$ une variété affine donnée par des équations $f_1, \dots, f_r$, soit $x \in X$. On dit que x est un point *lisse* de X si et seulement si sa matrice Jacobienne par rapport à $f_1, \dots, f_r$ est de rang $n - \dim X$ ou de façon équivalente si $\dim_K \Theta_{X,x} = \dim X$.

On dit que X est *lisse* si elle est lisse en tout point.

Définition 3.2. Soit A un anneau local Noetherien avec idéal maximal $\mathfrak{m}$ et corps résiduel $K = A/\mathfrak{m}$, alors on dit que A est *régulier* si $\dim_K \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim A$.

Proposition 3.3. Soit $X \subset \mathbf{A}^n$ une variété affine et $x \in X$ un point, alors X est lisse en x si et seulement si $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier.

Démonstration. On sait que l'espace tangent $\Theta_{X,x}$ est défini comme le noyau de la matrice Jacobienne de X en x par rapport à un ensemble d'équations de X . Soit r le rang de cette matrice, comme la matrice Jacobienne induit une application linéaire $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ on a

$$n = r + \dim \Theta_{X,x}. \quad (29)$$

Comme $\dim \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \dim \Theta_{X,x}$ et $\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim X$ par la proposition 1.4 on conclut. $\square$

On voit que la notion de régularité de l'anneau local est une notion locale, on peut donc l'utiliser pour définir la lissité.

Définition 3.4. Soit X une variété quasiprojective, alors X est lisse en x si et seulement si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est régulier, un point où X n'est pas lisse est dit un point *singulier*. On dit que X est *lisse* si elle est lisse en tout point et qu'elle est *singulière* sinon.

Proposition 3.5. Soit A un anneau local Noetherien avec idéal maximal $\mathfrak{m}$ et corps résiduel $k = A/\mathfrak{m}$, on a $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim A$.

Démonstration. Voir [AM19] Corollaire 11.15 p.121. $\square$

Proposition 3.6. *Soit X une variété quasiprojective, alors pour tout $x \in X$*

$$\dim_K \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2 \geq \dim X \quad (30)$$

et le lieu où il y a égalité est ouvert. Autrement dit l'ensemble des points singuliers de X est fermé.

Démonstration. L'inégalité vient des propositions 1.4 et 3.5. Cette énoncé est local donc on peut se restreindre au cas où $X \subset \mathbf{A}^n$ est affine. On a que $\Theta_{X,x}$ est le noyau de la matrice Jacobienne de X en x par rapport à un ensemble d'équations de X et l'égalité $\dim_K \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2 = \dim X$ correspond au point où la matrice Jacobienne est de rang maximal égal à $n - \dim X$. Il suffit donc de montrer que les points où la matrice Jacobienne est de rang $\leq n - \dim X - 1$ est fermé. Or cela revient à ce que tous les mineurs de taille $(n - \dim X) \times (n - \dim X)$ soient nuls, ce qui donne les équations des points singuliers. $\square$

Définition 3.7. Soit X une variété algébrique de dimension n et $x \in X$ un point lisse. On dit que $u_1, \dots, u_n \in O_{X,x}$ sont des *coordonnées locales* si pour tout $i, u_i \in \mathfrak{m}_x$ et leur image forment une base de $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$.

Théorème 3.8. *Si $u_1, \dots, u_n$ sont des coordonnées locales en un point lisse $x \in X$, alors ils engendrent $\mathfrak{m}_x$.*

Démonstration. Voir [Sha13] Theorem 2.5. $\square$

Ce théorème est très important pour la raison suivante : Soit $f \in O_{X,x}$, alors on peut exprimer f de façon unique en une série formelle en les $u_1, \dots, u_k$.

3.1 Séries formelles

Dans cette partie nous fournirons assez peu de preuves et on donnera les références dans [Sha13]. Soit X une variété, $x \in X$ un point lisse et $(u_1, \dots, u_n)$ des coordonnées locales en x . Soit $f \in O_{X,x}$, alors $f(x) = \alpha_0 \in K$ et alors $f(x) - \alpha_0 \in \mathfrak{m}_x$. Ainsi, comme $(u_1, \dots, u_n)$ est une base du K -espace vectoriel $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ tels que

$$f_2 := f - \alpha_0 - \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in \mathfrak{m}_x^2. \quad (31)$$

On peut donc ainsi écrire $f_2 = \sum_{i=1}^r g_i h_i$ avec $g_i, h_i \in \mathfrak{m}_x$. On peut donc trouver $\beta_{ij}, \gamma_{ij} \in K$ tels que

$$g_i - \sum_{j=1}^r \beta_{ij} u_j \in \mathfrak{m}_x^2, \quad h_i - \sum_{j=1}^r \gamma_{ij} u_j \in \mathfrak{m}_x^2. \quad (32)$$

En écrivant $\sum_i \left(\sum_j \beta_{ij} u_j \right) \left(\sum_j \gamma_{ij} u_j \right) = \sum_{k,l} \alpha_{kl} u_k u_l$, on a

$$f_3 = f - \alpha_0 - \sum_i \alpha_i u_i - \sum_{k,l} \alpha_{kl} u_k u_l \in \mathfrak{m}_x^3. \quad (33)$$

En continuant ainsi, on trouve des polynômes homogènes f_n de degré n tels que

$$f - f_0 - f_1 - \cdots - f_n \in \mathfrak{m}_x^{n+1}. \quad (34)$$

Définition 3.9. Soit $T = (T_1, \dots, T_n)$ des variables, l'anneau des séries formelles $K[[T]]$ est l'ensemble des éléments de la forme

$$F_0 + F_1 + \cdots + F_n + \cdots \quad (35)$$

tel que pour tout i , F_i est homogène de degré i . Un élément de $K[[T]]$ est appelé une *série formelle*. La multiplication et l'addition sont définies de la même façon que pour les polynômes.

Si $f \in O_{X,x}$, une *expansion de Taylor* de f est la donnée de polynômes homogènes $f_k(u_1, \dots, u_n)$ en les u_i de degré k tels que

$$f - f_0(u_1, \dots, u_n) - \cdots - f_k(u_1, \dots, u_n) \in \mathfrak{m}_x^{k+1}. \quad (36)$$

Proposition 3.10. Soit X une variété, $x \in X$ un point lisse et $(u_1, \dots, u_n)$ des coordonnées locales en x , alors tout $f \in O_{X,x}$ admet une unique expansion de Taylor. Autrement dit on a un homomorphisme de K -algèbres injectifs

$$O_{X,x} \hookrightarrow K[[T]] \quad (37)$$

qui envoie u_i sur T_i .

On peut en fait montrer la chose suivante : on peut définir la topologie $\mathfrak{m}_x$ -adique sur $O_{X,x}$ par la distance $d_x(f, g) = e^{\{-\max_{n \geq 0: (f-g) \in \mathfrak{m}_x^n\}}}$, on peut montrer que $\mathfrak{m}_x^n$ sont fermés et ouverts pour cette topologie et le complété $\widehat{O_{X,x}}$ de $O_{X,x}$ par rapport à cette distance est exactement $K[[T]]$.

On admettra le fait suivant

Proposition 3.11. L'anneau $K[[T]]$ est factoriel.

4 Propriétés des points lisses

4.1 Sous-variétés de codimension 1

Théorème 4.1. *Si X est une variété et $x \in X$ est un point lisse, alors $O_{X,x}$ est un anneau factoriel.*

Démonstration. Voir [Sha13] Theorem 2.11. □

De ce théorème on va déduire un résultat très important pour la suite, si X est une variété lisse et $Y \subset X$ une sous-variété de codimension 1, alors Y est définie localement par une seule équation.

Définition 4.2. Soit X une variété, $x \in X$ et $Y \subset X$ une sous-variété. On dit que $f_1, \dots, f_m \in O_{X,x}$ sont des *équations locales* de Y en x s'il existe un ouvert affine $U \ni x$ tel que $f_1, \dots, f_m \in K[U]$ et

$$I_{Y \cap U} = (f_1, \dots, f_m). \quad (38)$$

On aurait pu aussi définir tout localement, si Y est une sous-variété de X , son *idéal de définition* dans $O_{X,x}$ est

$$I_{Y,x} = \{f \in O_{X,x} : \exists U \ni x, f \in K[U], f_{U \cap Y} \equiv 0\}. \quad (39)$$

Lemme 4.3. *Des germes $f_1, \dots, f_m \in O_{X,x}$ sont des équations locales de $Y \subset X$ en x si et seulement si $I_{Y,x} = (f_1, \dots, f_m)$.*

Démonstration. On peut supposer X affine, si $(f_1, \dots, f_m) = I_Y$, alors on a $(f_1, \dots, f_m) = I_{Y,x}$. En effet, si $g \in I_{Y,x}$, alors il existe un ouvert $U = D(h)$ principal de X contenant x tel que g est régulier sur U . On a alors que $I_{Y \cap D(h)} = (f_1, \dots, f_m)$ est l'idéal engendré par $f_1, \dots, f_m$ dans $K[X][1/h]$ ce qui prouve que $g \in (f_1, \dots, f_m)$.

Réciproquement, si $(f_1, \dots, f_m) = I_{Y,x}$ et soit $U \subset X$ un ouvert affine contenant x tel que les f_i soient réguliers sur U . Soit $g \in I_{Y \cap U}$ soit g_x le germe qu'elle définit en x , on a alors dans $O_{X,x}$ que $g = h_1 f_1 + \dots + h_m f_m$. Soit $D(h) \subset U$ un ouvert principal tel que chaque h_i soit régulier sur $D(h)$, on a alors qu'il existe $m \geq 0$ tel que

$$g = \frac{h_1 f_1 + \dots + h_m f_m}{h^m} \quad (40)$$

et donc $g \in (f_1, \dots, f_m)_{D(h)}$. Si on effectue ce procédé pour $g_1, \dots, g_s$ des générateurs de I_Y sur X , on obtient un ouvert principal U sur lequel $(f_1, \dots, f_m) = I_{Y \cap U}$. □

Théorème 4.4. *Soit $Y \subset X$ une sous-variété irréductible de codimension 1, alors pour tout $x \in X$ lisse, Y admet une équation locale en x , i.e l'idéal $I_{Y,x}$ est principal.*

Démonstration. On peut supposer X affine. Soit $f \in I_{Y,x}$, comme $O_{X,x}$ est factoriel on décompose f en facteurs irréductibles. Un de ces facteurs doit s'annuler sur Y , quitte à remplacer X par un plus petit ouvert affine on peut supposer que g est régulier sur X . Comme $Y \subset V(g)$ et que Y est de codimension 1, on a que

$$V(g) = Y \cup Y'. \quad (41)$$

Si $x \in Y'$, alors il existe des fonctions h, h' régulières sur X qui s'annulent en x telles que $hh' = 0$ sur $V(g)$ mais $h, h' \neq 0$ sur $V(g)$. Par le Nullstellensatz on a alors que g divise $(hh')^r$ pour un certain entier $r \geq 1$ mais donc également dans $O_{X,x}$. Comme g est irréductible, g doit diviser par exemple h . Mais alors $h = 0$ sur $V(g)$ et c'est absurde. Donc $x \notin Y'$ et quitte à restreindre X , on peut supposer $Y = V(g)$. Maintenant, si $u \in K[X]$ s'annule sur $Y = V(g)$, alors g doit diviser u^ℓ et donc g divise u dans $O_{X,x}$ et on a bien que $I_{Y,x} = (g)$. $\square$

Théorème 4.5. *Si X est une variété lisse et $\phi : X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle vers une variété projective, alors $\text{Ind}(\phi)$ est de codimension ≥ 2 .*

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat lorsque $Y = \mathbf{P}^n$. L'assertion est locale et on peut donc supposer que X est affine. L'application rationnelle ϕ est donnée par $(f_0 : \dots : f_n)$ avec $f_i \in K(X)$. Soit $x \in X$, on peut multiplier tous les f_i par un même élément de $O_{X,x}$ de sorte que pour tout i , $f_i \in O_{X,x}$ et les f_i n'ont pas de facteurs communs dans $O_{X,x}$. Le lieu d'indétermination de ϕ est exactement le lieu de zéros communs des f_i . Si ce lieu Y était de codimension 1, alors Y admettrait une équation locale g qui serait un facteur commun de tous les f_i , c'est absurde. $\square$

Corollaire 4.6. *Toute application rationnelle d'une courbe lisse vers une variété projective est un morphisme.*

Corollaire 4.7. *Deux courbes projectives lisses birationnelles sont isomorphes.*

4.2 Éclatement d'un point lisse sur une variété

L'éclatement d'un point lisse sur une variété consiste à "remplacer" ce point par le projectivisé de son espace tangent. On traite d'abord le cas de l'éclatement de $\mathbf{A}^n$ en l'origine avant de passer au cas général.

Soit $0 \in \mathbf{A}^n$ l'origine de $\mathbf{A}^n$. L'ensemble des droites de $\mathbf{A}^n$ passant par 0 est paramétré par $\mathbf{P}^{n-1}$. On souhaite définir une variété X telle que on a un morphisme $\pi : X \rightarrow \mathbf{A}^n$ avec les propriétés suivantes :

1. $\pi : X \setminus \pi^{-1}(0) \rightarrow \mathbf{A}^n \setminus 0$ est un isomorphisme.
2. $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbf{P}^{n-1}$.

On procède de la façon suivante. On considère l'espace produit $\mathbf{A}^n \times \mathbf{P}^{n-1}$ et on définit X par

$$X = \{(x, L) : x \in \mathbf{A}^n, x \in L\}. \quad (42)$$

C'est bien une variété algébrique car si $x = x_1, \dots, x_n$ et $L = [y_1 : \dots : y_n]$, alors $x \in L$ revient au système d'équations

$$\forall i, j, x_i y_j = x_j y_i. \quad (43)$$

Et le morphisme $\pi : X \subset \mathbf{A}^n \times \mathbf{P}^{n-1} \rightarrow \mathbf{A}^n$ est la projection sur le premier facteur. On montre que X satisfait bien les conditions nécessaires. Déjà si $x = (0, \dots, 0)$ est l'origine, alors on a bien que

$$\pi^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbf{P}^{n-1} \simeq \mathbf{P}^{n-1}. \quad (44)$$

En effet, toutes les équations dans (43) deviennent $0 = 0$. Donc la condition (2) est vérifiée. On note $E = \pi^{-1}(0)$. Ensuite si $x \neq 0$, alors il existe i_0 tel que $x_{i_0} \neq 0$ et on a alors

$$\forall j, y_j = \frac{x_j}{x_{i_0}} y_{i_0}. \quad (45)$$

Ce qui impose $y_{i_0} \neq 0$ et donc on peut supposer $y_{i_0} = x_{i_0}$ et on a

$$\pi^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_n), [x_1 : \dots : x_n]. \quad (46)$$

On voit donc qu'on a un isomorphisme $X \setminus E \rightarrow \mathbf{A}^n \setminus \{0\}$ dont l'inverse est donné par

$$x \in \mathbf{A}^n \setminus \{0\} \mapsto (x_1, \dots, x_n), [x_1 : \dots : x_n]. \quad (47)$$

Maintenant, soit X une variété et $x \in X$ un point lisse. Soient $(u_1, \dots, u_n)$ des coordonnées locales en x et U un ouvert affine contenant x où $u_1, \dots, u_n$ sont régulières. On définit l'éclatement $\tilde{X}$ de X de x par recollement de deux variétés X_1, X_2 . On définit $X_1 = X \setminus \{x\}$ et $X_2 \subset U \times \mathbf{P}^{n-1}$ définies par les équations

$$u_i y_j = u_j y_i. \quad (48)$$

On a alors que $X_1 \cap U \simeq U \setminus \{x\} \simeq X_2 \simeq E$ et on définit $\tilde{X}$ par recollement de X_1, X_2 le long de $X_1 \cap U$ et $X_2 \setminus E$.

Exercice 4.8. Montrer que si on avait choisi d'autres coordonnées locales en x on aurait une variété isomorphe.

Définition 4.9. Si X est une variété et $Y \subset X$ une sous-variété. Soit $\pi : Z \rightarrow X$ l'éclatement d'un point lisse p . La *transformée stricte* de Y est l'adhérence de $\pi^{-1}(Y \setminus \{p\})$ dans Z .

5 Diviseurs

5.1 Diviseur d'une fonction rationnelle

Une fonction rationnelle sur $\mathbf{P}^1$ est de la forme

$$f = \frac{(t - \alpha_1)^{m_1} \cdots (t - \alpha_r)^{m_r}}{(t - \beta_1)^{n_1} \cdots (t - \beta_s)^{n_s}}. \quad (49)$$

Les points $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les *zéros* de f et les $\beta_1, \dots, \beta_s$ les *pôles*. On peut encoder ces informations de la façon suivante, le diviseur de f est

$$\operatorname{div}(f) = m_1(\alpha_1) + \cdots + m_r(\alpha_r) - n_1(\beta_1) - \cdots - n_s(\beta_s). \quad (50)$$

Et il n'est pas dur de voir que deux fractions rationnelles ont même diviseur si et seulement si leur quotient est une constante. On généralise cette notion pour toute variété.

Définition 5.1. Soit X une variété irréductible. Un *diviseur de Weil* sur X est une somme formelle

$$D = a_1 E_1 + \cdots + a_r E_r \quad (51)$$

où $a_i \in \mathbf{Z}$ et E_i est une sous-variété irréductible de codimension 1. Si tous les a_i sont positifs, on dira que D est *effectif*, ce qu'on notera $D \geq 0$. Une sous-variété irréductible de codimension 1 est appelée un *diviseur premier*. Si tous les a_i sont non-nuls, le *support* de D est défini comme

$$\operatorname{Supp} D := \bigcup_i E_i. \quad (52)$$

On peut additionner deux diviseurs, en effet, si D, D' sont des diviseurs de Weil alors on peut écrire

$$D = a_1 E_1 + \cdots + a_r E_r, \quad D' = a'_1 E_1 + \cdots + a'_r E_r \quad (53)$$

et on définit

$$D + D' := (a_1 + a'_1)E_1 + \cdots + (a_r + a'_r)E_r. \quad (54)$$

Les diviseurs sur une variété X forment un groupe que l'on note $\text{Div}(X)$. On va maintenant montrer comment on peut associer pour tout $f \in K(X)^\times$ un diviseur $\text{div}(f)$. Ceci est possible dans le cas suivant : X est lisse en codimension 1, i.e le lieu singulier de X est de codimension ≥ 2 .

Soit $E \subset X$ une sous-variété irréductible de codimension 1. Il existe un ouvert affine $U \subset X$ qui intersecte E tel que E donné par une seule équation π dans U par le théorème 4.4. Maintenant, pour tout $f \in K[U]$, il existe un entier $k \geq 0$ tel que

$$f \in (\pi^k) \text{ et } f \notin (\pi^{k+1}). \quad (55)$$

En effet, sinon on aurait $f \in \cap_k (\pi^k)$ mais soit $x \in E \cap U$ un point lisse, alors $O_{X,x}$ est un anneau factoriel et on aurait dans $O_{X,x}$ que f est divisible par toutes les puissances positives de π , ce qui impliquerait que $f = 0$ dans $O_{X,x}$. Donc f est nulle sur un ouvert contenant x et donc $f = 0 \in K[U]$. L'entier $k \geq 0$ est noté $\text{ord}_E(f)$. C'est l'ordre d'annulation de f le long de E . On a les propriétés suivantes

$$\text{ord}_E(fg) = \text{ord}_E(f) + \text{ord}_E(g) \quad (56)$$

$$\text{ord}_E(f + g) \geq \min(\text{ord}_E(f), \text{ord}_E(g)). \quad (57)$$

Maintenant si $f \in K(X)$, on peut écrire $f = h/g$ avec $h, g \in K[U]$ et alors on définit

$$\text{ord}_E(f) = \text{ord}_E(h) - \text{ord}_E(g). \quad (58)$$

La définition est bien indépendante du choix des représentants de la fraction. À priori cette définition dépend du choix de l'ouvert affine U , on montre que ce n'est pas le cas. Si $V \subset U$ est un ouvert affine, alors π est également une équation locale de E sur V et donc

$$\text{ord}_E^U = \text{ord}_E^V. \quad (59)$$

Maintenant, si U, U' sont deux ouverts affines de X qui intersectent E , alors il existe un ouvert affine $V \subset U \cap U'$ qui intersecte également E et alors

$$\text{ord}_E^U = \text{ord}_E^V = \text{ord}_E^{U'}. \quad (60)$$

Si $\text{ord}_E(f) = k > 0$, on dit que f a un zéro d'ordre k le long de E , si $\text{ord}_E(f) = -k < 0$, on dit que f a un pôle d'ordre k le long de E .

Lemme 5.2. Soit X une variété lisse en codimension 1 et $f \in K(X) \setminus \{0\}$, alors il existe un nombre fini de diviseurs premiers E tels que $\text{ord}_E(f) \neq 0$.

Démonstration. Soit U un ouvert affine de X et $f \in K(X)$, on écrit $f = g/h$ avec $g, h \in K[U]$. On a alors que $\text{ord}_E(f) = 0$ pour tout diviseur premier de U qui n'est pas une composante irréductible de $V(g) \cup V(h)$. On conclut en utilisant le fait que X admet un recouvrement fini par des ouverts affines. $\square$

Définition 5.3. Soit X une variété lisse en codimension 1 et $f \in K(X)^\times$, le diviseur de f est défini par

$$\text{div}(f) = \sum_E \text{ord}_E(f) E. \quad (61)$$

C'est bien un élément de $\text{Div}(X)$ par le lemme 5.2. Un tel diviseur est dit *principal*. En particulier, l'application $\text{div} : f \in K^\times \rightarrow \text{div}(f) \in \text{Div}(X)$ est un morphisme de groupes et les diviseurs principaux forment un sous-groupe de $\text{Div}(X)$ car c'est l'image de ce morphisme, on le note $\text{Prin}(X)$.

Lemme 5.4. Si $f \in K[X]$, alors $\text{div}(f) \geq 0$. Si X est lisse alors c'est une équivalence.

Démonstration. La première assertion est claire. Supposons X lisse et montrons que $f \in K[X]$. Soit $x \in X$ un point où f n'est pas régulière. On écrit $f = g/h$ avec $g, h \in O_x$ mais $g/h \notin O_x$. Comme O_x est factoriel, on peut supposer que g, h n'ont pas de facteurs en communs. Soit $\pi \in O_x$ un élément irréductible qui divise h mais pas g . Alors pour tout voisinage ouvert affine U de x assez petit $V(\pi)$ est irréductible de codimension 1 et si E est son adhérence dans X on aurait $\text{ord}_E(f) < 0$ c'est absurde. $\square$

Corollaire 5.5. Soit X une variété projective lisse et $f, g \in K(X)^\times$, alors

$$\text{div}(f) = \text{div}(g) \Leftrightarrow f = \lambda g \quad (62)$$

avec $\lambda \in K^\times$.

Démonstration. Si $\text{div}(f) = \text{div}(g)$, alors $\text{div}(f/g) = 0$. En particulier $f/g \in K[X]$, donc il existe $\lambda \in K^\times$ tel que $f/g = \lambda$. $\square$

Exemple 5.6. Toute variété irréductible de codimension 1 dans $\mathbf{A}^n$ est le lieu de zéros d'un polynôme irréductible F . Donc tous les diviseurs sur $\mathbf{A}^n$ sont principaux.

Exemple 5.7. Si $X = \mathbf{P}^n$, toute sous-variété irréductible de codimension 1 est le lieu de zéros d'un polynôme homogène F . Soit $f \in K(X)$, alors $f = \frac{F}{G}$ où F, G sont deux polynômes homogènes de même degré. On écrit $F = \prod_i L_i^{m_i}$ et $G = \prod_j H_j^{n_j}$ et alors

$$\operatorname{div}(f) = \sum m_i C_i - \sum n_j E_j \quad (63)$$

où $C_i = V(L_i)$ et $E_j = V(H_j)$. Comme $\deg F = \deg G$, on a $\sum m_i \deg L_i = \sum_j n_j \deg E_j$. On définit le *degré* d'un diviseur $D = \sum k_i C_i$ par $\deg D = \sum k_i \deg C_i$ où $\deg C_i$ est le degré de son équation homogène. On vient de montrer que tout diviseur principal est de degré zéro. Réciproquement si $D = \sum k_i C_i$ est de degré 0, alors en notant $C_i = V(H_i)$ on a que $D = \operatorname{div}(f)$ avec

$$f = \prod_i H_i^{m_i}. \quad (64)$$

Définition 5.8. On dit que $D, D' \in \operatorname{Div}(X)$ sont *linéairement équivalents* s'il existe $f \in K(X)^\times$ tel que

$$D = D' + \operatorname{div}(f). \quad (65)$$

Le *groupe des classes* de X est le groupe $\operatorname{Cl}(X)$ des diviseurs modulo équivalences linéaires, i.e

$$\operatorname{Cl}(X) = \operatorname{Div}(X) / \operatorname{Prin}(X). \quad (66)$$

Théorème 5.9. On a

$$\operatorname{Cl}(\mathbf{P}^n) = \mathbf{Z}H \quad (67)$$

où H est n'importe quel hyperplan de $\mathbf{P}^n$. En particulier toute hypersurface irréductible de degré d est linéairement équivalente à dH .

Démonstration. En reprenant l'exemple 5.7, on voit qu'on a un homomorphisme surjectif de groupes $\deg : \operatorname{Div}(X) \rightarrow \mathbf{Z}$ dont le noyau est exactement les diviseurs principaux. Comme pour tout hyperplan H , $\deg(H) = 1$ on a le résultat. $\square$

5.2 Diviseurs de Cartier

Soit $D = \sum k_i C_i$ un diviseur de Weil. Pour tout $x \in X$, on peut trouver un ouvert U affine tel que tous les C_i sont définis par une équation π_i sur U et alors

$$D|_U = \operatorname{div}(f)|_U \quad (68)$$

où

$$f = \prod \pi_i^{k_i}. \quad (69)$$

Ainsi, tout diviseur de Weil est *localement* principal. On peut choisir un recouvrement ouvert $X \cup U_i$ tel que pour tout i , $D|_{U_i} = \text{div}(f_i)$. On a les contraintes suivantes sur f_i .

1. $\forall i, f_i \in K(U_i)^\times = K(X)^\times$.
2. $\forall i, j, f_i/f_j \in O(U_i \cap U_j)^\times$.

En effet, le second point vient du fait que $\text{div}(f_i) = \text{div}(f_j)$ sur $U_i \cap U_j$.

Définition 5.10. Un *diviseur de Cartier* sur X est la donnée d'un recouvrement ouvert $X = \bigcup U_i$ et de fonctions rationnelles $f_i \in K(U_i)^\times$ telles que

$$\forall i, j, \quad f_i/f_j \in O(U_i \cap U_j)^\times. \quad (70)$$

Deux diviseurs de Cartier $(U_i, f_i)_i, (V_j, g_j)_j$ sont égaux si pour tout i, j , $f_i|_{U_i \cap V_j} = g_j|_{U_i \cap V_j}$. On note $\text{Cartier}(X)$ l'ensemble des diviseurs de Cartier de X .

Un diviseur de Cartier est *principal* s'il existe $f \in K(X)^\times$ tel que pour tout i , $f_i = f$.

Soit $x \in X$, une *équation locale* de D en x est la donnée d'un $f \in K(X)^\times$ tel que $D = (U_i, f_i)$ avec un des f_i égal à f et U_i contient x .

On a une loi de groupe sur les diviseurs de Cartier donnée par

$$(U_i, f_i) \cdot (V_j, g_j) = (U_i \cap V_j, f_i g_j). \quad (71)$$

Elle préserve les diviseurs principaux et on définit le *groupe de Picard* de X par le quotient du groupe des diviseurs de Cartier par les diviseurs principaux.

Proposition 5.11. Soit X une variété lisse irréductible, alors on a un isomorphisme

$$\text{Div}(X) \simeq \text{Cartier}(X) \quad (72)$$

qui envoie diviseurs principaux sur diviseurs principaux. Ainsi, on a également un isomorphisme

$$\text{Cl}(X) \simeq \text{Pic}(X). \quad (73)$$

Démonstration. On vient de construire la flèche $\text{Div}(X) \rightarrow \text{Cartier}(X)$ et elle envoie diviseurs principaux sur diviseurs principaux. Réciproquement, soit (U_i, f_i) un diviseur de Cartier. Soit $E \subset X$ un diviseur premier, on définit

$$k_E = \text{ord}_E(f_i). \quad (74)$$

Le nombre k_E ne dépend pas du choix de f_i par la propriété de compatibilité et on peut définir le diviseur de Weil associé

$$D = \sum_E k_E E. \quad (75)$$

C'est bien une somme finie car l'ensemble des diviseurs premiers E tel que $E \cap U_i \neq \emptyset$ et $\text{ord}_E(f_i) \neq 0$ est fini et $X \setminus U_i$ a un nombre fini de composantes irréductibles. C'est la flèche inverse $\text{Cartier}(X) \Rightarrow \text{Div}(X)$ et elle envoie bien diviseurs principaux sur diviseurs principaux. $\square$

Exemple 5.12. Si X est une variété lisse et $\pi : Z \rightarrow X$ est l'éclatement d'un point $x \in X$, alors $\pi^{-1}(x) = E$ est un diviseur. On l'appelle le *diviseur exceptionnel*.

Définition 5.13. Soit $\phi : X \rightarrow Y$ un morphisme entre variétés lisses et $D = (U_i, f_i) \in \text{Cartier}(Y)$ un diviseur de Cartier. On définit le *tiré-en-arrière* ϕ^*D de D par ϕ par

$$\phi^*D = (\phi^{-1}(U_i), \phi^*(f_i)). \quad (76)$$

Lemme 5.14. Le tiré-en-arrière ϕ^* envoie les diviseurs principaux sur les diviseurs principaux et induit un homomorphisme de groupes

$$\phi^* : \text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(X). \quad (77)$$

Si $D = \sum_i a_i E_i$ est un diviseur, alors on définit la *multiplicité* de D en x par

$$m_x(D) = \sum_i a_i m_x(E_i) \quad (78)$$

et la multiplicité de E_i en x est la multiplicité d'une de ses équations locales.

Proposition 5.15. Soit X une variété lisse et D un diviseur sur X . Si $\pi : Z \rightarrow X$ est l'éclatement d'un point p , alors

$$\pi^*D = \pi'(D) + mE \quad (79)$$

où E est le diviseur exceptionnel et m est la multiplicité de D en p .

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour D irréductible. Déjà comme π est un isomorphisme en dehors de p , on a que

$$\pi^*D = \pi'(D) + rE \quad (80)$$

avec r à déterminer. Soit h une équation locale de D en x , on peut prendre un ouvert affine U autour de p avec coordonnées locales $x_1, \dots, x_n$ centrées en x . L'éclatement $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$ est donné en coordonnées locales par

$$\pi(v, u_1, \dots, u_{n-1}) = (v, u_1 v, \dots, u_{n-1} v) \quad (81)$$

et v est une équation locale de E le diviseur exceptionnel. Si on écrit h sous forme de série formelles, alors

$$h = h_m(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k \geq m+1} h_k(x_1, \dots, x_n) \quad (82)$$

où h_i est le terme homogène de degré i . Maintenant,

$$\pi^* h = v^m h_m(1, u_1, \dots, u_{n-1}) + \sum_{k \geq m+1} v^k h_k(1, u_1, \dots, u_{n-1}). \quad (83)$$

Comme $h_m(1, u_1, \dots, u_{n-1}) \neq 0$ on a bien que $r = m$. $\square$

5.3 Système linéaire associé à un diviseur

Les polynômes à une variable de degré $\leq n$ forment un espace vectoriel de dimension fini. Soit f un tel polynôme, c'est une fonction rationnelle sur $\mathbf{P}^1$ et son diviseur est de la forme

$$\operatorname{div}(f) = D - \deg(f)(\infty) \quad (84)$$

avec $\deg(f) \leq n$ et $\operatorname{Supp} D \subset \mathbf{A}^1$. On voit alors que les polynômes de degré $\leq n$ peut être vu comme l'ensemble des fonctions rationnelles f sur $\mathbf{P}^1$ telles que

$$\operatorname{div}(f) + n(\infty) \geq 0. \quad (85)$$

On montre comment faire le même procédé pour toute variété projective lisse.

Soit X une variété projective lisse et D un diviseur. On définit l'espace de Riemann-Roch de D par

$$\mathcal{L}(D) := \{f \in K(X)^\times : \operatorname{div}(f) + D \geq 0\}. \quad (86)$$

C'est un espace vectoriel et on admettra le fait que si X est projective, c'est un espace vectoriel de dimension finie. On notera $\ell(D)$ sa dimension.

Lemme 5.16. Soit $f \in K(X)^\times$ et D un diviseur sur X , on a $f \in \mathcal{L}(D)$ si et seulement si pour tout ouvert affine U tel que D admet une équation locale h sur U on a

$$fh \in O(U). \quad (87)$$

Démonstration. Soit U un ouvert affine tel que D admette une équation locale h sur U , on a alors que

$$D|_U = \operatorname{div}(h). \quad (88)$$

Et donc si $f \in \mathcal{L}(D)$, alors $\operatorname{div}(fh)|_U = \operatorname{div}(f)|_U + \operatorname{div}(h)|_U \geq 0$ et donc $fh \in O(U)$.

Réciproquement, si f vérifie la seconde propriété, il vient que $\operatorname{div}(f) + D$ est effectif car pour tout ouvert affine, l'équation locale de ce diviseur est une fonction régulière. $\square$

Exemple 5.17. Soit H l'hyperplan $\{x_0 = 0\}$ dans $\mathbf{P}^n$, alors

$$\mathcal{L}(H) = \operatorname{Vect} \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right). \quad (89)$$

Remarque 5.18. Étant donné que deux fonctions rationnelles ont même diviseurs si et seulement si leur quotient est une constante non-nulle on voit que le projectivisé de $\mathcal{L}(D)$ est

$$\mathbf{P}(\mathcal{L}(D)) = \{D' \in \operatorname{Div}(X) : D' \geq 0, D' \sim D\}. \quad (90)$$

Théorème 5.19. Si $D \sim D'$, alors $\ell(D) = \ell(D')$.

Démonstration. Il existe $f \in K(X)^\times$ tel que $D - D' = \operatorname{div}(f)$. Soit $g \in \mathcal{L}(D)$, alors $\operatorname{div}(g) + D \geq 0$ et donc

$$\operatorname{div}(fg) + D' \geq 0. \quad (91)$$

On a donc une application linéaire $g \in \mathcal{L}(D) \mapsto fg \in \mathcal{L}(D')$ et l'inverse est donné par la division par f , d'où l'égalité. $\square$

Proposition 5.20. Soit $\phi : X \rightarrow Y$ un morphisme dominant, alors $\phi^* : K(Y) \hookrightarrow K(X)$ induit une application linéaire injective

$$\phi^* : \mathcal{L}(D) \hookrightarrow \mathcal{L}(\phi^*D). \quad (92)$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{L}(D)$, il faut montrer que $\phi^* f \in \mathcal{L}(\phi^* D)$. Par le lemme 5.16, il suffit de montrer que pour tout $x \in X$, il existe une équation locale h_x de $\phi^* D$ en x tel que $\phi^* f h_x \in \mathcal{O}_x$. Mais soit $y = \phi(x)$ et h_y une équation locale de D en y , alors $\phi^* h_y$ est une équation locale de $\phi^* D$ en x et on a bien que $f h_y \in \mathcal{O}_y$ par le lemme 5.16. $\square$

Exemple 5.21. On a vu que $\text{Pic}(\mathbf{P}^d) = \mathbf{Z}H$ où H est un hyperplan de $\mathbf{P}^d$. Il vient que

$$\ell(nH) \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 1. \quad (93)$$

Et on a $\ell(0) = 1$ et $\ell(nH) = 0$ pour tout $n < 0$.

Définition 5.22. Soit X une variété projective lisse.

- (i) Un *système linéaire* est la donnée d'un sous-espace vectoriel $V \subset \mathcal{L}(D)$ pour un certain diviseur D .
- (ii) Si $V = \mathcal{L}(D)$ on dit que V est un système linéaire *complet*.
- (iii) Le *lieu base* d'un système linéaire V est l'ensemble des points $x \in X$ tels que

$$x \in \bigcap_{D' \in \mathbf{P}(V)} \text{Supp } D'. \quad (94)$$

On le note $\text{Bs}(V)$. Si $V = \mathcal{L}(D)$, alors on écrit $\text{Bs}(V) = \text{Bs}(D)$.

Lemme 5.23. Soit V un système linéaire sur une variété projective lisse X . Soit E un diviseur premier de X , on définit

$$\text{ord}_E(V) := \min(\text{ord}_E(D) : D \in V) \geq 0. \quad (95)$$

Alors, il existe un nombre fini de diviseur premier E tel que $\text{ord}_E(V) > 0$.

Démonstration. Soit $f_1, \dots, f_r$ une base de V , par les propriétés des valuations on a que $\text{ord}_E(V) = \min(\text{ord}_E(f_1), \dots, \text{ord}_E(f_r)) + \text{ord}_E(D)$ donc les seuls diviseurs qui vérifie $\text{ord}_E(V) > 0$ sont contenus dans le support des $\text{div}(f_i)$ et $\text{Supp } D$. $\square$

Définition 5.24. Soit V un système linéaire, le diviseur

$$F = \sum_E \text{ord}_E(V) E \quad (96)$$

est appelé la *partie fixe* de V et le système linéaire

$$V - F := \{D - F : D \in V\} \quad (97)$$

est la *partie mobile* de V .

Lemme 5.25. Soit D un diviseur et $V = \mathcal{L}(D)$ son système linéaire associé, si F est la partie fixe de D , alors

$$\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(M) \quad (98)$$

où $M = D - F$.

Démonstration. On a

$$\mathcal{L}(D) = \{f : \operatorname{div}(f) + D \geq 0\} \quad (99)$$

$$= \{f : \operatorname{div}(f) + D \geq F\} \quad (100)$$

$$= \{f : \operatorname{div}(f) + (D - F) \geq 0\} = \mathcal{L}(M). \quad (101)$$

□

On conclut cette partie par une application qui est le calcul du groupe d'automorphismes de $\mathbf{P}^n$. On a vu que $\operatorname{PGL}_{n+1}(K)$ agit fidèlement sur $\mathbf{P}^n$. On montre en fait que c'est le groupe d'automorphismes de $\mathbf{P}^n$.

Théorème 5.26. Soit $n \geq 1$, alors

$$\operatorname{Aut}(\mathbf{P}^n) = \operatorname{PGL}_{n+1}(K). \quad (102)$$

Démonstration. Soit $g \in \operatorname{Aut}(\mathbf{P}^n)$, alors g agit sur $\operatorname{Pic}(\mathbf{P}^n) = \mathbf{Z}H$ par automorphisme de groupes par le tiré-en-arrière. On doit donc avoir que $f^*H \sim \pm H$ et comme $\ell(H) > 0$ et $\ell(-H) = 0$ on doit avoir $f^*H \sim H$. Donc H est envoyé sur un autre hyperplan H' par f . Quitte à composer f par un élément de $\operatorname{PGL}_{n+1}(K)$ on peut supposer que $H = \{x_0 = 0\}$ est fixe par f . On a donc que f agit par automorphisme linéaire sur $\mathcal{L}(H)$ qui est de dimension $n + 1$. Soit M la matrice de $\operatorname{GL}_{n+1}(K)$ de f dans la base $\left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$. On voit alors que l'action de f sur $\mathbf{P}^n$ est donnée par

$$f([x_0 : \dots : x_n]) = \left[M(1) : M\left(\frac{x_1}{x_0}\right) : \dots : M\left(\frac{x_n}{x_0}\right) \right] = [M(x_0) : M(x_1) : \dots : M(x_n)]. \quad (103)$$

□

5.4 Application associée à un système linéaire.

Soit X une variété projective lisse et V un système linéaire sur X de dimension $N(V) + 1$. Le système linéaire V définit naturellement une application rationnelle

$$\phi_V : x \in X \dashrightarrow [f_0(x) : \cdots : f_{N(V)}(x)] \in \mathbf{P}^{N(V)} \quad (104)$$

où $f_0, \dots, f_{N(V)}$ est une base de V . Il est clair que ϕ_V est défini à automorphisme de $\mathbf{P}^n$ près. On a que ϕ_V est bien définie sur le complémentaire du lieu base de V . Si $V = \mathcal{L}(D)$ est un système linéaire complet, on notera ϕ_D au lieu de $\phi_{\mathcal{L}(D)}$.

Proposition 5.27. *Si V est un système linéaire, alors*

$$\text{Ind}(\phi_V) = \text{Bs}(V - F). \quad (105)$$

Démonstration. Soit $f_0, \dots, f_N$ une base de $V \subset \mathcal{L}(D)$. Soit $x \in X$ et h une équation locale de D en x , on a alors localement en x

$$\phi_V = [f_0 h : \cdots : f_N h] \quad (106)$$

et chaque $f_i h \in \mathcal{O}_x$. Soit g un PGCD de $f_0 h, \dots, f_N h$ dans $\mathcal{O}_x$, on a que g est une équation locale de F en x et alors

$$\phi_V = \left[\frac{f_0 h}{g} : \cdots : \frac{f_N h}{g} \right]. \quad (107)$$

Maintenant, $x \in \text{Ind}(\phi_V)$ si et seulement si pour tout $i = 0, \dots, N$

$$\frac{f_i h}{g}(x) = 0. \quad (108)$$

En effet, ϕ_V est régulière en x si et seulement si on peut écrire $\phi_V = [u_0 : \cdots : u_n]$ avec u_i régulière en x et qui ne s'annulent pas toutes en x . On aurait alors $u_i v_i = \frac{f_i h}{g}$ avec v_i inversible. Mais alors il existerait i_0 tel que $u_{i_0}(x) \neq 0$ et on aurait $\frac{f_{i_0} h}{g}(x) \neq 0$.

On voit donc que $x \in \text{Ind}(\phi_V) \Leftrightarrow x \in \text{Bs}(D - F)$. $\square$

Réciproquement, soit $\phi : X \dashrightarrow \mathbf{P}^n$ une application rationnelle. On sait que $\text{codim Ind } \phi \geq 2$. Soit H un hyperplan de $\mathbf{P}^n$, on a un morphisme $\phi : X \setminus \text{Ind}(\phi) \rightarrow \mathbf{P}^N$ et on note $D_\phi = \phi^* H$. C'est un diviseur sur $X \setminus \text{Ind}(\phi)$ qui s'étend en un diviseur de X car $\text{codim Ind}(\phi) \geq 2$. On note $V_\phi = \phi^* \mathcal{L}(H) \subset \mathcal{L}(D_\phi)$.

Proposition 5.28. À automorphisme linéaire près $\phi = \phi_{V_\phi}$.

Démonstration. À automorphisme linéaire près on peut supposer que $H = \{x_0 = 0\}$, alors en écrivant

$$\phi = [f_0 : \cdots : f_N] \quad (109)$$

et alors on voit que

$$\phi^* \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right) = \left(1, \frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_n}{f_0} \right). \quad (110)$$

Ainsi, $V_\phi = \text{Vect}(1, f_1/f_0, \dots, f_n/f_0) \subset \mathcal{L}(D_\phi)$ et $\phi = \phi_{V_\phi}$. $\square$

Définition 5.29. Soit X une variété projective lisse et D un diviseur, on dit que D est *très ample* s'il existe une immersion fermée $\phi : X \hookrightarrow \mathbf{P}^N$ et un hyperplan H sur $\mathbf{P}^n$ tel que $D = \phi^*H$.

Un diviseur D est *ample* s'il existe $m \geq 1$ tel que mD est très ample.

Chapitre III

Géométrie birationnelle des surfaces projectives

On va maintenant se restreindre à l'étude des surfaces projectives. On établira les théorèmes sur la structure des applications birationnelles, le nombre d'intersection sur les diviseurs, etc . . .

Dans toute la suite les variétés qu'on considère sont irréductibles et lisses.

1 Nombre d'intersections

Soit X une surface projective, alors un diviseur premier sur X est une courbe irréductible C . Soient C_1, C_2 deux courbes irréductibles distinctes sur X et $p \in C_1 \cap C_2$. On définit la *multiplicité* d'intersection de C_1 et C_2 en p par

$$i(p; C_1, C_2) = \dim_K O_p / \langle f_1, f_2 \rangle \quad (1)$$

où f_i est une équation locale de C_i en p . En particulier, si C_1, C_2 sont *transverses*, i.e si $d_p f_1$ n'est pas proportionnelle à $d_p f_2$, alors (f_1, f_2) sont des coordonnées locales en p et $i(p; C_1, C_2) = 1$. On admettra le résultat suivant.

Théorème 1.1. *Il existe une unique fonction*

$$\text{Div}(X) \times \text{Div}(X) \rightarrow \mathbf{Z} \quad (2)$$

notée $D_1 \cdot D_2$ telle que

$$(1) \quad D_1 \cdot D_2 = D_2 \cdot D_1.$$

$$(2) (D_1 + D_2) \cdot D_3 = D_1 \cdot D_3 + D_2 \cdot D_3.$$

(3) Si C_1, C_2 sont deux courbes irréductibles distinctes, alors

$$C_1 \cdot C_2 = \sum_{p \in C_1 \cap C_2} i(p; C_1, C_2). \quad (3)$$

$$(4) \text{ Si } D_1 \sim D_3, \text{ alors } D_1 \cdot D_2 = D_3 \cdot D_2.$$

On appelle cette fonction le *nombre d'intersection* sur les diviseurs. La condition (4) permet de passer à équivalence linéaire près et on a donc un produit bilinéaire symétrique

$$\text{Pic}(X) \times \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbf{Z}. \quad (4)$$

On définit le groupe de Néron-Severi de X de la façon suivante : On dit que D est *numériquement* équivalent à D' si pour toute courbe C , $D \cdot C = D' \cdot C$. On note cette équivalence $D \equiv D'$. On a évidemment $D \sim D' \Rightarrow D \equiv D'$. Le groupe de Néron-Severi de X est le groupe des diviseurs modulo équivalence numérique. On le note $\text{NS}(X)$ et on a un morphisme surjectif $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{NS}(X)$. On admettra le fait suivant :

Proposition 1.2. Soit X une surface projective lisse rationnelle, alors $\text{Pic}(X) = \text{NS}(X)$.

Exemple 1.3. On sait que $\text{Pic}(\mathbf{P}^2) = \mathbf{Z}L$ où L est une droite. Comme deux droites de $\mathbf{P}^2$ s'intersecte en un point on a que $H^2 = 1$. Donc $\text{Pic}(\mathbf{P}^2) = \text{NS}(\mathbf{P}^2)$ et le produit d'intersection est donné par

$$nH \cdot mH = nm. \quad (5)$$

On retrouve le fait que deux courbes de degrés n, m qui n'ont pas de composantes en communs ont nm points d'intersections comptés avec multiplicité. C'est le théorème de Bézout.

Exercice 1.4. Soit $X = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$. Montrer que $\text{Pic} \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 = \mathbf{Z}L \oplus \mathbf{Z}L'$ où $L = \mathbf{P}^1 \times \{\text{pt}\}$ et $L' = \{\text{pt}\} \times \mathbf{P}^1$ et que le produit d'intersection est de la forme

$$(n_1L + m_1L') \cdot (n_2L + m_2L') = n_1m_2 + m_1n_2. \quad (6)$$

Théorème 1.5. Soit X une surface projective et $\text{Bl}_x X$ l'éclatement d'un point, alors si E est le diviseur exceptionnel, on a

$$\text{Pic}(\text{Bl}_x X) = \pi^* \text{Pic}(X) \oplus \mathbf{Z}E \quad (7)$$

avec les propriétés suivantes :

$$(1) \quad \forall D, D' \in \text{Pic}(X), \pi^* D \cdot \pi^* D' = D \cdot D'.$$

$$(2) \quad \forall D \in \text{Pic}(X), \pi^* D \cdot E = 0.$$

$$(3) \quad E^2 = -1.$$

On a de plus le critère de Castelnuovo : si Y est une surface projective et E est une courbe isomorphe à $\mathbf{P}^1$ telle que $E^2 = -1$, alors il existe X une surface projective et $\pi : Y \rightarrow X$ est un morphisme birationnel tel que $\pi(Y) = p \in X$ et π est l'éclatement de p .

Exemple 1.6. On considère $X = \mathbf{P}^2$ et $p = [1 : 0 : 0]$. On considère la fibration $q : [x : y : z] \in \mathbf{P}^2 \dashrightarrow [y : z] \in \mathbf{P}^1$. On a $\text{Ind}(q) = \{p\}$. Soit L_z la transformée stricte de $\{z = 0\}$, alors on a $\pi^* \{z = 0\} = L_z + E$. Et donc on a $L_z^2 = 0$. On aurait pu trouver ce résultat d'une autre manière. En effet $L_z = q^*(\infty)$ et $L_z \sim q^*(\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbf{P}^1$ comme deux fibres ne s'intersectent pas on retrouve que $L_z^2 = 0$.

2 Factorisation des applications birationnelles entre surfaces.

On va montrer dans cette partie que toute application birationnelle entre surfaces projectives se résoud par des éclatements de points. Il y a deux parties. Tout d'abord on montre que pour toute application rationnelle $f : X \dashrightarrow Y$ où X est une surface projective et Y une variété projective, il existe une suite d'éclatement $\pi : Z \rightarrow X$ tel que $f \circ \pi : Z \rightarrow Y$ est un morphisme.

On montrera ensuite que si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme birationnel, alors f est une composition de

2.1 Résolution des indéterminations

Théorème 2.1. Soit X une surface projective et $f : X \dashrightarrow \mathbf{P}^n$ une application rationnelle, alors il existe une suite d'éclatements de points $\pi : Y \rightarrow X$ telle que $f \circ \pi : Y \rightarrow \mathbf{P}^n$ est un morphisme

Démonstration. Soit $f = (f_0 : \dots, f_n)$. On sait que $f = \phi_V$ pour un certain système linéaire V . Si F est la partie fixe de D , alors $\text{Ind}(f) = \text{Bs}(V - F)$ est une union finie de points. On définit $d(f)$ comme le nombre

$$d(f) = M_1 M_2 \tag{8}$$

où $M_1, M_2 \in V - F$. On montre que $d(f) \geq 0$. Pour cela il suffit de montrer qu'on peut trouver $M_1, M_2 \in V - F$ sans composante commune. Comme $V - F$ est sans composante fixe, pour toute courbe $C \subset X$, il existe $D \in V - F$ tel que $\text{ord}_C(D) = 0$. On note $D_i = \text{div}(f_i) - F$. Soit g_i une équation locale de D_i en un point $c \in C$. Tous les diviseurs de $V - F$ sont de la forme

$$D_\lambda = \text{div} \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i f_i \right) - F. \quad (9)$$

Donc $\text{ord}_C(D_\lambda) > 0$ si et seulement si $\sum_i \lambda_i g_i|_C = 0$. Donc l'ensemble des λ tel que $\text{ord}_C(D_\lambda) > 0$ est un sous-espace vectoriel strict de $V - F$. Comme le corps de base est algébriquement clos, il est infini et donc $V - F$ n'est pas une union finie de sous-espaces stricts. Ainsi, on peut trouver $D_\lambda, D_{\lambda'} \in V - F$ tel que $D_\lambda, D_{\lambda'}$ n'ont pas de composantes en communs. Maintenant soit p un des points bases de $V - F$. La *multiplicité* de $\mathcal{L}(V - F)$ au point p est le nombre

$$m_x(\mathcal{L}(V - F)) = \min(m_x(D_1) : D_1 \in \mathbf{P}\mathcal{L}(V - F)). \quad (10)$$

Si $\pi : Z \rightarrow Y$ est l'éclatement de p , alors $\pi^*V - F$ a pour composante fixe E avec multiplicité $r = m_x(\mathcal{L}(V - F))$. Ainsi, la partie fixe de $\pi^*(V)$ est $\pi^*F + rE$ et alors

$$d(f \circ \pi) = (V - F - rE)^2 = V - F^2 - r < V - F^2 = d(f). \quad (11)$$

On voit donc que ce processus doit s'arrêter et le théorème est démontré. $\square$

Soit $f : X \dashrightarrow \mathbf{P}^n$ une application rationnelle dominante, le *graphe* de f est défini de la façon suivante. Soit U un ouvert où f est définie. on définit Γ_f comme l'adhérence du graphe de f dans $U \times \mathbf{P}^n \subset X \times \mathbf{P}^n$. Soit $p \in X$, alors on définit la *transformée* de p par f par

$$f(p) := \pi_2(\pi_1^{-1}(p)) \quad (12)$$

où π_1, π_2 sont les deux projections de $X \times \mathbf{P}^n$. En particulier si f est définie en p on obtient bien le point $f(p)$.

On admettra le fait suivant :

Proposition 2.2. *Soit $f : X \dashrightarrow \mathbf{P}^n$ une application rationnelle dominante avec X une surface projective, alors $p \in \text{Ind}(f)$, si et seulement si $f(p)$ est une union de courbes.*

Pour les applications birationnelles de surfaces cela donne le corollaire suivant.

Corollaire 2.3. *Si $f : X \dashrightarrow Y$ est une application birationnelle entre surfaces projectives, alors $p \in \text{Ind}(f)$ si et seulement s'il existe une courbe $C \subset Y$ tel que f^{-1} contracte C sur p .*

2.2 Factorisation des morphismes birationnels

On montre le résultat suivant.

Proposition 2.4. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme birationnel entre surfaces projectives. Soit $q \in \text{Ind}(f^{-1})$. Si $\pi : Z \rightarrow Y$ est l'éclatement de q , alors $\pi^{-1} \circ f$ est un morphisme.*

Démonstration. On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & Z \supset E \\ & \nearrow g & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{f} & Y \ni q \end{array} \quad (13)$$

On veut montrer que g est un morphisme. Si ce n'est pas le cas, alors soit $p \in \text{Ind}(g)$. Par la proposition 2.2, on a que $g(p)$ doit contenir une courbe. Ça ne peut être que le diviseur exceptionnel E et on doit avoir $f(p) = q$. On montre le point suivant : la différentielle $d_p f : T_p X \rightarrow T_q Y$ est un isomorphisme. Si ce n'est pas le cas, alors il existe une droite $L \subset T_q Y$ qui contient l'image de la différentielle. Mais alors il existe un ensemble fini $S \subset E$ tel que g^{-1} est défini sur $E \setminus S$ et alors on aurait pour tout $m \in E \setminus S$, $\text{Im}(d_m \pi) = \text{Im}(d_p f \circ d_m g^{-1}) \subset L$. Mais c'est absurde car on sait que π s'écrit en coordonnées locales $\pi(u, v) = (u, uv)$ avec $u = 0$ une équation de E et donc sa différentielle est de la forme

$$d_{(u,v)} \pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{pmatrix} \quad (14)$$

On voit donc que l'image de $d_{(u,v)} \pi$ varie avec u et ne peut pas être contenue dans une droite.

On aboutit maintenant à une contradiction car vu que q est un point d'indétermination de f^{-1} et que $f(p) = q$, il existe une courbe C passant par p telle que $f(C) = q$, mais alors si $z = 0$ est une équation de C , on a que $d_x z$ est dans le noyau de la différentielle $d_x f$ car C est contractée, c'est une contradiction. $\square$

On en déduit le théorème suivant.

Théorème 2.5. *Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme birationnel, alors f est la composée d'un nombre fini d'éclatements de points et d'un automorphisme de Y .*

2.3 Surfaces de Hirzebruch

Une *surface* de Hirzebruch est une surface projective S munie d'un morphisme surjectif vers $\mathbf{P}^1$ telle que chaque fibre est isomorphe à $\mathbf{P}^1$. On admettra le résultat suivant.

Théorème 2.6. *Une surface S de Hirzebruch est rationnelle et $\mathrm{NS}(S) = \mathbf{Z}[f] + \mathbf{Z}[s]$ avec f une fibre de la fibration vers $\mathbf{P}^1$ et s une section de la fibration. On a que $s^2 = -n$ avec $n \geq 0$ et pour chaque n , S est unique à isomorphisme près.*

On a de plus $f^2 = 0$ et $s \cdot f = 1$. On notera $\mathbf{F}_n$ une surface de Hirzebruch telle que $s^2 = -n$. On montre comment construire $\mathbf{F}_n$ pour tout $n \geq 0$.

$n = 0$

On a $\mathbf{F}_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ avec le morphisme vers $\mathbf{P}^1$ étant une des deux projections.

$n = 1$

On a que $\mathbf{F}_1$ est l'éclatement de $\mathbf{P}^2$ en un point p . En effet, si L est une droite de $\mathbf{P}^2$ passant par p , alors on a un morphisme $\pi : \mathrm{Bl}_p \mathbf{P}^2 \rightarrow \mathbf{P}^1$ qui provient de l'éclatement toutes les fibres sont linéairement équivalentes à L' et le diviseur exceptionnel E est une section et vérifie $E^2 = -1$.

Construction de $\mathbf{F}_{n+1}$ à partir de $\mathbf{F}_n$

Supposons avoir construit $\mathbf{F}_n$, on va montrer comment construire $\mathbf{F}_{n+1}$ à partir de $\mathbf{F}_n$. Soit $\sigma : \mathbf{F}_n \rightarrow \mathbf{P}^1$ le morphisme vers $\mathbf{P}^1$, soit s_n une section et f_n une fibre. Soit $\tau : X \rightarrow \mathbf{F}_n$ l'éclatement de $s_n \cap f_n$. La surface X admet un morphisme vers $\mathbf{P}^1$ qui est $\sigma \circ \tau$. Maintenant si on note s'_n et f'_n les transformées strictes de la section et de la fibre, on a

$$(s'_n)^2 = s_n^2 - 1 = -(n+1), \quad (f'_n)^2 = -1. \quad (15)$$

Or f'_n est isomorphe à $\mathbf{P}^1$ donc par le critère de Castelnuovo, on peut contracter f'_n . Si $q = \sigma(f_n)$, alors la fibre de q par $\sigma \circ \tau$ a exactement deux composantes

irréductibles : f'_n et le diviseur exceptionnel E . Soit $\omega : X \rightarrow Y$ la contraction de f'_n , on a alors que $\sigma \circ \tau \circ \omega^{-1} : Y \rightarrow \mathbf{P}^1$ est un morphisme, car ω est la contraction d'une composante irréductible d'une des fibres. Maintenant si on note $s_{n+1} = \omega(s'_n)$ et $f_{n+1} = \omega(E)$ on a bien que E est une fibre de la fibration vers $\mathbf{P}^1$ et

$$s_{n+1}^2 = -(n+1), \quad f_{n+1}^2 = 0. \quad (16)$$

Et donc $Y = \mathbf{F}_{n+1}$. Ce procédé est appelé une transformation élémentaire.

Proposition 2.7. *À isomorphisme près $\mathbf{F}_n$ est donné par*

$$\mathbf{F}_n = \{[x : y : z] \times [u : v] \in \mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1 : yv^n = zu^n\}. \quad (17)$$

Le morphisme vers $\mathbf{P}^1$ est donné par la projection sur le second facteur. On a un plongement $\mathbf{A}^2 \hookrightarrow \mathbf{F}_n$ donné par

$$(x, y) \mapsto [x : y^n : 1] \times [y : 1] \quad (18)$$

et la projection restreinte à $\mathbf{A}^2$ est $q(x, y) = y$. La section de $\mathbf{F}_n$ est

$$s = \{[1 : 0 : 0] \times [u : v]\} \quad (19)$$

et les fibres de q sont données par

$$\forall \alpha \in \mathbf{P}^1, \quad q^{-1}(\alpha) = [x : y : z] \times \{\alpha\}. \quad (20)$$

En particulier on retrouve bien que $\mathbf{F}_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et $\mathbf{F}_1$ est $\mathbf{P}^2$ éclaté en un point. La transformation élémentaire $\mathbf{F}_n \dashrightarrow \mathbf{F}_{n+1}$ devient

$$[x : y : z] \times [u : v] \in \mathbf{F}_n \mapsto [xv : yu : zv] \times [u : v] \in \mathbf{F}_{n+1}. \quad (21)$$

Proposition 2.8. *Soit $n \geq 0$ et $q : \mathbf{F}_n \rightarrow \mathbf{P}^1$ la projection. On note $U_0 = q^{-1}(\mathbf{P}^1 \setminus \{\infty\})$ et $U_\infty = q^{-1}(\mathbf{P}^1 \setminus \{0\})$. Alors ces deux ouverts sont isomorphes à $\mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^1$, la section E est donnée par $\mathbf{A}^1 \times \{\infty\}$, la fibration q est la projection sur $\mathbf{A}^1$ et le changement de cartes est donné par*

$$t \times [u : v] \in U_0 \mapsto \frac{1}{t} \times [u : tv]. \quad (22)$$

Démonstration. Cette proposition est directe si on utilise la proposition 2.7 mais on peut aussi le démontrer directement.

On sait que $\mathbf{F}_0 = \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ et $\mathbf{F}_1$ est l'éclatement de $\mathbf{P}^2$ en un point donc pour $n = 0, 1$ le résultat est vrai et la vérification est laissée en exercice.

Supposons avoir montré le résultat pour $\mathbf{F}_n$. On note U_0^n et U_∞^n les deux ouverts construits. Alors dans $U_\infty^n = \mathbf{A}^1 \times [1 : 0]$, la section E est $\mathbf{A}^1 \times \{\infty\}$ et $q^{-1}(\infty) = \{0\} \times \mathbf{P}^1$ est la fibre à l'infini. On doit donc éclater le point $0 \times [1 : 0]$. Si $s, [u : v]$ sont les coordonnées sur $\mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^1$ on se place dans la carte $u = 1$. Ce qui donne

$$(s, v) \times [z : w], \quad sw = zv. \quad (23)$$

On veut maintenant contracter la transformée stricte de $s = 0$. On se place dans la carte $w = 1$, ce qui donne $s = zv$ et donc la transformée stricte de $s = 0$ est $z = 0$. On a donc un ouvert isomorphe à $\mathbf{A}^2$ avec coordonnées (z, v) et la contraction de $z = 0$ est

$$(z, v) \mapsto (zv, z) = zv \times [z : 1] \in \mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^1. \quad (24)$$

En homogénéisant cela donne le morphisme

$$(s, v) \times [z : w] \mapsto zv \times [z : w] \in \mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^1. \quad (25)$$

L'image est bien tout $\mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^1$ on note cet ouvert U_∞^{n+1} et on a l'application

$$s \times [u : v] \in U_\infty^n \mapsto s \times [su : v]. \quad (26)$$

Maintenant comme les éclatements et contraction ont lieu dans la fibre $q^{-1}(\infty)$ on a $U_0^{n+1} = U_0^n$. Et on a

$$t \times [u : v] \in U_0^n = U_0^{n+1} \mapsto \frac{1}{t} \times [u : t^n v] = s \times [s^n u : v] \in U_\infty^n \quad (27)$$

$$\mapsto s \times [s^{n+1} u : v] = \frac{1}{t} \times [u : t^{n+1} v] \in U_\infty^{n+1}. \quad (28)$$

□

Exercice 2.9. Soit $n \geq 1$, on considère $\mathbf{F}_n$ la surface de Hirzebruch avec sa fibration $q : \mathbf{F}_n \rightarrow \mathbf{P}^1$. On sait que si E est une section de q et L_∞ une fibre, alors $\mathbf{F}_n \setminus (E \cup L_\infty) = \mathbf{A}^2$.

1. Montrer que $q : \mathbf{F}_n \rightarrow \mathbf{P}^1$ est le morphisme associé au système linéaire complet de L_∞ .
2. On souhaite décrire le groupe $G = \text{Aut}(\mathbf{F}_n) \cap \text{Aut}(\mathbf{A}^2)$. Montrer que si $f \in G$ alors f fixe E et L_∞ .

3. En déduire que f préserve la fibration $q : \mathbf{F}_n \rightarrow \mathbf{P}^1$ et donc que f est élémentaire.
4. Montrer en utilisant la proposition 2.8 que

$$G = \{f(x, y) = (ax + b, cy + P(x)) : a, c \in K^\times, b \in K, P(x) \in K[x]_{\leq n}\}. \quad (29)$$

Chapitre IV

Preuve du théorème de Jung

On rappelle l'énoncé du théorème de Jung. Un automorphisme de $\mathbf{A}^2$ est dit *élémentaire* s'il est de la forme

$$f(x, y) = (ax + b, cy + P(x)) \quad (1)$$

avec $a, c \in K^\times, b \in K$ et $P(x) \in K[x]$. C'est un groupe qu'on note E isomorphe à

$$E = K[x] \rtimes (K^\times \times \text{Aut}(\mathbf{A}^1)). \quad (2)$$

On a vu dans un des exercices que E était exactement le sous-groupe de $\text{Aut } \mathbf{A}^2$ qui préserve la fibration

$$q : (x, y) \in \mathbf{A}^2 \mapsto x. \quad (3)$$

Le théorème de Jung énonce que $\text{Aut}(\mathbf{A}^2)$ est engendré par le sous-groupe des transformations affines et par E .

1 Préliminaires de la preuve

On va démontrer le théorème par récurrence sur le nombre de points d'indétermination. Soit $f \in \text{Aut}(\mathbf{A}^2)$, alors f induit une transformation birationnelle $f : \mathbf{P}^2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$. Il existe alors une suite minimale d'éclatements $\sigma : M \rightarrow \mathbf{P}^2$ telle que le relevé $\sigma \circ f : M \rightarrow \mathbf{P}^2$ est un morphisme. Un *point d'indétermination* de f est un des points qu'on a éclaté pour obtenir σ . Les points d'indéterminations ne vivent donc pas que sur $\mathbf{P}^2$. Le nombre de points d'indéterminations de f est noté $\#\text{Ind}(f)$. On a $f \in \text{Aut}(\mathbf{P}^2) \Leftrightarrow \#\text{Ind}(f) = 0$.

Une *complétion* de $\mathbf{A}^2$ est une surface projective lisse qui possède un ouvert dense isomorphe à $\mathbf{A}^2$. Un exemple de complétion de $\mathbf{A}^2$ est $\mathbf{P}^2$ ou bien $\mathbf{F}_n, n \geq 0$. Si X est une complétion de $\mathbf{A}^2$, alors tout éclatement d'un point de $X \setminus \mathbf{A}^2$ est encore une complétion de $\mathbf{A}^2$ et la contraction d'une -1 -courbe de $X \setminus \mathbf{A}^2$ est aussi une complétion. Si X, Y sont deux complétions de $\mathbf{A}^2$ et $f \in \text{Aut}(\mathbf{A}^2)$, alors f induit une application birationnelle $F : X \dashrightarrow Y$ qui vérifie

$$\begin{array}{ccc} X & \dashrightarrow^F & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{A}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbf{A}^2 \end{array} . \quad (4)$$

On dit que F est le *relevé* de f . Si on veut parler des points d'indéterminations de f qui vivent sur X , on parlera des points d'indéterminations *propres*.

Proposition 1.1. *Soit M une complétion de $\mathbf{A}^2$ obtenue en éclatement un nombre fini de points au-dessus de $\mathbf{P}^2$ et $f : M \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ qui est le relevé d'un automorphisme de $\mathbf{A}^2$ qui n'est pas un morphisme, alors*

- (1) *f admet un unique point d'indétermination propre.*
- (2) *f admet des points d'indéterminations $p_1, \dots, p_s$ avec $s \geq 1$ tels que*
 - (a) *p_1 est le point d'indétermination propre de f .*
 - (b) *pour tout $i = 2, \dots, s$, p_i est situé sur le diviseur exceptionnel obtenu en éclatant p_{i-1} .*
- (3) *Chacune des courbes de $X \setminus \mathbf{A}^2$ est contractée sur un point par f .*
- (4) *Soit $\pi : Z \rightarrow X$ la résolution minimale de $f : X \dashrightarrow Y$, alors la première courbe contractée par $f \circ \pi$ est la transformée stricte d'une des courbes de $X \setminus \mathbf{A}^2$.*
- (5) *En particulier si $X = \mathbf{P}^2$, la première courbe contractée par $f \circ \pi$ est la transformée stricte de la droite à l'infini de $\mathbf{P}^2$.*

Démonstration. Si p est un point d'indétermination propre de $f : X \dashrightarrow \mathbf{P}^2$, alors f^{-1} doit contracter une courbe sur p . La seule courbe qui peut être contractée est la droite à l'infini de $\mathbf{P}^2$ car f est un automorphisme sur $\mathbf{A}^2$. Donc f a un unique point d'indétermination propre. Cela montre (1) et (2) se montre en raisonnant par récurrence sur le nombre d'éclatements pour résoudre f . Ensuite chaque courbe de $X \setminus \mathbf{A}^2$ est ou bien contractée sur un point, ou bien envoyée sur la droite à l'infini dans $\mathbf{P}^2$ par f . Mais comme f^{-1} contracte la droite à l'infini de $\mathbf{P}^2$ sur p_1 le deuxième cas n'est pas possible.

Enfin, par ce qui précède $Z \setminus \mathbf{A}^2$ est constitué du diviseur exceptionnel E d'auto-intersection -1 obtenu en éclatant p_s , de la transformée stricte des diviseurs exceptionnels obtenus en éclatant $p_i, i = 1, \dots, s-1$ qui sont tous d'auto-intersection ≤ -2 et de la transformée stricte des courbes de $X \setminus \mathbf{A}^2$. Comme on ne peut contracter que des -1 -courbes, la première courbe contractée par $f \circ \pi$ est E ou bien la transformée stricte d'une des courbes de $X \setminus \mathbf{A}^2$. Si E était la première courbe contractée alors p_s ne serait pas un point d'indétermination de f c'est absurde. $\square$

2 Preuve du théorème

On raisonne par récurrence sur $\# \text{Ind}(f)$. On va démontrer le résultat suivant.

Proposition 2.1. *Soit $f \in \text{Aut}(\mathbf{A}^2)$ tel que $\# \text{Ind}(f) \geq 1$, alors il existe $h \in \langle \text{Aff}(\mathbf{A}^2), E \rangle$ tel que*

$$\# \text{Ind}(fh) < \# \text{Ind}(f). \quad (5)$$

Ce qui démontre le théorème de Jung par récurrence. Pour montrer le théorème on va considérer la résolution minimale de f

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ \swarrow \pi & & \searrow F \\ \mathbf{P}^2 & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbf{P}^2 \end{array} . \quad (6)$$

En inspectant de plus près les éclatements effectués par π et en utilisant la proposition 1.1 on va montrer la proposition 2.1.

Soit $f \in \text{Aut}(\mathbf{A}^2)$ tel que $\# \text{Ind}(f) \geq 1$. On sait par la proposition 1.1 que f admet un unique point d'intermiation propre sur $\mathbf{P}^2$. On compose f avec un automorphisme affine a tel que le point d'indétermination propre de fa soit $[1 : 0 : 0]$. On a alors $\# \text{Ind}(fa) = \# \text{Ind}(f)$. On va maintenant montrer qu'il existe $e \in E$ tel que $\# \text{Ind}(fae) < \# \text{Ind}(fa)$. On note $f_0 = fa$.

2.1 Première étape : éclatement de $[1 : 0 : 0]$.

On éclate $[1 : 0 : 0]$. Cela donne

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{F}_1 & \\ \swarrow \pi & & \searrow f_1 \\ \mathbf{P}^2 & \xrightarrow{\quad f_0 \quad} & \mathbf{P}^2 \end{array} . \quad (7)$$

Avec de plus une fibration $q : \mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{P}^1$ qui est $q(x, y) = y$ sur $\mathbf{A}^2$. Pour être sûr que les opérations que l'on va mener donne bien un élément de E il faudra s'assurer que l'on préserve la fibration q . On a $\# \text{Ind}(f_1) = \text{Ind}(f_0) - 1$. On ne peut pas avoir que f_1 est un morphisme car sinon $[1 : 0 : 0]$ n'était pas un point d'indétermination de f_0 . En effet, la seule -1 courbe qu'on peut contracter est le diviseur exceptionnel.

Dans la suite, on considérera les surfaces de Hirzebruch comme des complétions de $\mathbf{A}^2$. En particulier $\mathbf{F}_n \setminus \mathbf{A}^2$ est l'union de deux courbes rationnelles, une section qu'on note $s_\infty(\mathbf{F}_n)$ et une fibre qu'on note $f_\infty(\mathbf{F}_n)$. Ici on a $\mathbf{F}_1 \setminus \mathbf{A}^2 = s_\infty(\mathbf{F}_1) \cup f_\infty(\mathbf{F}_1)$.

Lemme 2.2. *Le point d'indétermination propre de $f_1 : \mathbf{F}_1 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ est $s_\infty(\mathbf{F}_1) \cap f_\infty(\mathbf{F}_1)$.*

Démonstration. On sait déjà que f_1 a un unique point d'indétermination propre p par la proposition 1.1. On sait de plus, toujours par la proposition 1.1, que la première courbe contractée par une résolution de f_1 doit être la transformée stricte de $f_\infty(\mathbf{F}_1)$ car c'est la transformée stricte de la droite à l'infini de $\mathbf{P}^2$. Or comme $f_\infty(\mathbf{F}_1)^2 = 0$ et qu'elle doit devenir une -1 -courbe, il faut encore éclater une fois un point dessus donc $p \in f_\infty(\mathbf{F}_1)$ et comme on doit également avoir $p \in s_\infty(\mathbf{F}_1)$ cela prouve le lemme. $\square$

2.2 Deuxième étape : récurrence ascendante

On a maintenant une application birationnelle $\mathbf{F}_1 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ qui est le relevé d'un automorphisme de $\mathbf{A}^2$. On va appliquer un nombre fini de transformations élémentaires sur les surfaces de Hirzebruch, ces transformations préserve bien la fibration q vers $\mathbf{P}^1$.

Proposition 2.3. *Soit $n \geq 1$. Soit $h : \mathbf{F}_n \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ une transformation birationnelle qui est le relevé d'un automorphisme de $\mathbf{A}^2$. Supposons que le point d'indétermination propre de h soit $p = s_\infty(\mathbf{F}_n) \cap f_\infty(\mathbf{F}_n)$, alors si $\phi : \mathbf{F}_n \dashrightarrow \mathbf{F}_{n+1}$ est la transformation élémentaire qui consiste à éclater p et contracter la transformée stricte de $f_\infty(\mathbf{F}_n)$, alors $\# \text{Ind}(h \circ \phi^{-1}) = \text{Ind}(h) - 1$, $h \circ \phi^{-1}$ n'est pas un morphisme et son point d'indétermination propre appartient à $f_\infty(\mathbf{F}_{n+1})$.*

Démonstration. On considère la résolution $\pi : M \rightarrow \mathbf{F}_n$ de h . Le morphisme π commence par l'éclatement de $p = s_\infty(\mathbf{F}_n) \cap f_\infty(\mathbf{F}_n)$, on note $\tau : Y \rightarrow \mathbf{F}_n$ l'éclatement. Par la proposition 1.1, la première courbe contractée par $h \circ \pi$ est la transfor-

mée stricte de $s_\infty(\mathbf{F}_n)$ ou bien la transformée stricte de $f_\infty(\mathbf{F}_n)$. Mais la transformée stricte de la section a auto-intersection $\leq -n-1 \leq -2$. Donc c'est forcément la transformée stricte de $f_\infty(\mathbf{F}_n)$ qui va être contractée en premier. Comme les autres éclatements de π sont sur des points qui n'appartiennent pas à la transformée stricte de $f_\infty(\mathbf{F}_n)$ (cette courbe est déjà d'auto-intersection -1 après le premier éclatement), on peut commencer par sa contraction. On arrive donc dans $\mathbf{F}_{n+1}$. Le diviseur exceptionnel $E \subset Y$ devient $f_\infty(\mathbf{F}_{n+1})$ et contient le point d'indétermination de $f \circ \phi^{-1}$. En effet, $h \circ \phi^{-1}$ ne peut pas être un morphisme car il n'y a pas de -1 -courbe en dehors de $\mathbf{A}^2$ à contracter. $\square$

Après la première étape, on peut appliquer la proposition 2.3 à $\mathbf{F}_1$. On arrive donc dans $\mathbf{F}_2$ et si le point d'indétermination propre de $f_1 : \mathbf{F}_2 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ est encore $s_\infty(\mathbf{F}_2) \cap f_\infty(\mathbf{F}_2)$ on peut appliquer la proposition à nouveau. Ce procédé doit se terminer car on a un nombre fini de points d'indéterminations et on construit une suite de transformations élémentaires $\phi : \mathbf{F}_1 \dashrightarrow \mathbf{F}_n$ avec $n \geq 2$ et on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{F}_n & \\ \phi \nearrow & & \searrow f_2 \\ \mathbf{F}_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbf{P}^2 \end{array} \quad (8)$$

avec $\# \text{Ind}(f_2) = \# \text{Ind}(f_1) - n + 1$ avec $n \geq 2$ et le point d'indétermination propre de f_2 est sur $f_\infty(\mathbf{F}_n) \setminus s_\infty(\mathbf{F}_n)$.

2.3 Troisième étape : récurrence descendante

On va maintenant appliquer une suite de transformations élémentaires pour passer de $\mathbf{F}_n$ à $\mathbf{F}_{n-1}$.

Proposition 2.4. *Soit $n \geq 2$ et $g : \mathbf{F}_n \rightarrow \mathbf{P}^1$ un relevé d'un automorphisme de $\mathbf{A}^2$ tel que le point d'indétermination propre p de g est dans $f_\infty(\mathbf{F}_n) \setminus s_\infty(\mathbf{F}_n)$. Alors soit $\phi : \mathbf{F}_n \dashrightarrow \mathbf{F}_{n-1}$ la transformation élémentaire qui consiste à éclater p et à contracter la transformée stricte de $f_\infty(\mathbf{F}_n)$, alors on a*

$$(1) \# \text{Ind } g \circ \phi^{-1} = \# \text{Ind } g - 1$$

$$(2) \text{ Le point d'indétermination propre de } g \circ \phi^{-1} \text{ appartient à } f_\infty(\mathbf{F}_{n-1}) \setminus s_\infty(\mathbf{F}_{n-1}).$$

Démonstration. Soit $\pi : Z \rightarrow \mathbf{F}_n$ la résolution minimale de g . Le morphisme π commence par l'éclatement de p et on appelle E le diviseur exceptionnel. Par la proposition 1.1, la première courbe contractée par $g \circ \pi$ est la transformée stricte

de $f_\infty(\mathbf{F}_n)$ car $s_\infty(\mathbf{F}_n)^2 = -n \leq -2$. On a donc que les éclatements successifs de π sont au-dessus d'un point de E qui n'appartient pas à la transformée stricte de $f_\infty(\mathbf{F}_n)$. On peut donc commencer d'abord par contracter $f_\infty(\mathbf{F}_n)'$. On arrive alors dans $\mathbf{F}_{n-1}$ et l'image de E est $f_\infty(\mathbf{F}_{n-1})$. Il est clair que $\# \text{Ind}(g \circ \phi^{-1}) = \# \text{Ind}(g) - 1$. Ensuite si $n \geq 3$, alors $\mathbf{F}_n$ ne contient pas de (-1) -courbe à l'infini donc $g \circ \phi^{-1}$ a un point d'indétermination propre, ce point est sur $f_\infty(\mathbf{F}_{n-1})$ car il était sur E mais n'est pas sur $s_\infty(\mathbf{F}_{n-1})$ car il était différent de $E \cap f_\infty(\mathbf{F}_n)'$.

Si $n = 2$, on montre que $g \circ \phi^{-1}$ doit avoir un point d'indétermination propre. En effet si ce n'était pas le cas, alors $g \circ \phi^{-1} : \mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{P}^2$ consisterait en la contraction de la section $s_\infty(\mathbf{F}_1)$ car c'est la seule (-1) -courbe à l'infini mais alors $f_\infty(\mathbf{F}_1)$ ne serait pas contracté par $g \circ \phi^{-1}$ ce qui contredit le point (3) de la proposition 1.1. Ce point d'indétermination propre n'est pas sur $s_\infty(\mathbf{F}_1)$ par le même raisonnement que dans le paragraphe précédent. $\square$

Après avoir appliqué cette proposition $n - 1$ fois on a construit $\phi_2 : \mathbf{F}_n \dashrightarrow \mathbf{F}_1$ qui est une suite de transformations élémentaires et telle que $\# \text{Ind}(f_2 \circ \phi_2^{-1}) = \# \text{Ind}(f_2) - (n - 1)$. Et le point d'indétermination propre de $f_2 \circ \phi_2^{-1}$ n'est pas sur $s_\infty(\mathbf{F}_1)$.

2.4 Une dernière contraction

On a donc maintenant $f_3 : \mathbf{F}_1 \dashrightarrow \mathbf{P}^2$ et le point d'indétermination propre p de f_3 appartient à $f_\infty(\mathbf{F}_1) \setminus s_\infty(\mathbf{F}_1)$. Si $\pi : Z \rightarrow \mathbf{F}_1$ est une résolution minimale de f_3 , alors la première courbe contractée par $f_3 \circ \pi$ est la transformée stricte de $s_\infty(\mathbf{F}_1)$ ou de $f_\infty(\mathbf{F}_1)$. On montre que le deuxième cas n'est pas possible. En effet, π commence par l'éclatement de p et $f_\infty(\mathbf{F}_1)'$ devient une (-1) -courbe et $s_\infty(\mathbf{F}_1)'$ également. Si $f_3 \circ \pi$ commence par la contraction de $f_\infty(\mathbf{F}_1)'$ alors l'auto-intersection de $s_\infty(\mathbf{F}_1)'$ devient 0 et cette courbe ne pourra plus être contractée, mais cela contredit le point (3) de la proposition 1.1. Donc $f_3 \circ \pi$ commence par la contraction de la transformée stricte de $s_\infty(\mathbf{F}_1)$ et on peut appliquer directement cette contraction. Soit $\phi_4 : \mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{P}^2$ la contraction de cette courbe, alors $\# \text{Ind}(f_3 \circ \phi_4^{-1}) = \# \text{Ind}(f_3)$ et modulo un isomorphisme on peut supposer que la courbe est contractée sur le point $[1 : 0 : 0]$.

En résumé, si on note $f_4 = f_3 \circ \phi_4^{-1}$ on a

$$f = f_4 \circ \phi_4^{-1} \phi_3^{-1} \phi_2^{-1} \phi_1^{-1} a^{-1}. \quad (9)$$

et $\# \text{Ind}(f) > \# \text{Ind}(f_4)$.

De plus, ϕ_1, ϕ_4 sont l'éclatement du point $[1 : 0 : 0]$ et ϕ_3, ϕ_4 sont des compositions de transformations élémentaires, donc elles préservent toutes la fibration $q(x, y) = x$ et leur produit correspond à un automorphisme élémentaire.

3 Produit amalgamé

On va montrer un résultat plus fort sur la structure du groupe $\text{Aut}(\mathbf{A}^2)$. On va montrer que c'est une *produit amalgamé* sur les sous-groupes $\text{Aff}(\mathbf{A}^2)$ et E . Cela signifie tout d'abord que n'importe quel automorphisme de f est un produit de affine et élémentaires, ce qu'on vient de démontrer mais de plus si on a un mot de la forme

$$m = e_1 a_1 e_2 a_2 \cdots e_r a_r \quad (10)$$

avec $a_i \in \text{Aff}(\mathbf{A}^2) \setminus E$ et $e_i \in E \setminus \text{Aff}(\mathbf{A}^2)$, alors ce mot n'est pas l'automorphisme identité.

La preuve est comme suit : un élément de $\text{Aff}(\mathbf{A}^2)$ n'est pas dans E si et seulement si il ne fixe pas le point $[1 : 0 : 0]$. Un élément $e \in E$ n'est pas dans $\text{Aff}(\mathbf{A}^2)$ si et seulement si il contracte la droite à l'infini sur un point. Et ce point est nécessairement $[1 : 0 : 0]$ en particulier c'est le point d'indétermination de e et e^{-1} . Maintenant prenons un mot comme celui dans (10). On regarde l'action de ce mot sur le point $p = [1 : 0 : 0]$. On a que $a_r(p) = q_r$ est un point sur la droite à l'infini différent de p . On a $e_r(q_r) = p$ car $q_r \neq p$ n'est pas un point d'indétermination de e_r . Par récurrence sur r on voit que $m(p) \neq p$ donc $m \neq \text{id}$.

Bibliographie

- [AM19] Michael F. Atiyah and I. G. MacDonald. *Introduction To Commutative Algebra*. CRC Press, Boca Raton, May 2019.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Lam02] Stéphane Lamy. A geometric proof of a theorem of Jung. *L'Enseignement Mathématique. 2e Série*, 48(3-4) :291–315, 2002.
- [Lan02] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, NY, 2002.
- [Sha13] Igor R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry I : Varieties in Projective Space*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013.