LOGARITHMES, FRACTION CONTINUE, APPROXIMATION, APPLICATION À LA CONSTRUCTION DE L'ÉCHELLE MUSICALE

Jean-Pierre Conze (Université de Rennes 1)

Club de Mathématiques,

15 octobre 2022

Résumé: Après une première partie sur les fonctions logarithmes, nous montrerons comment le logarithme en base 2 et la notion d'approximation interviennent dans la conception de l'échelle musicale (gamme "bien tempérée" utilisée à partir du 18ème siècle).

Plan

Contents

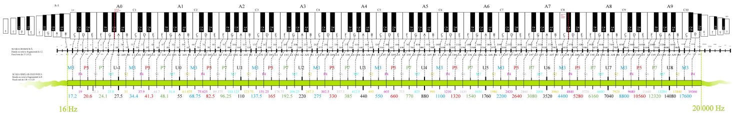

FIGURE 1. Gamme des fréquences audibles sur un clavier de 10 à 12 octaves (d'après Wikipedia, article "piano").

1. **Introduction**

1.1. **La fréquence des sons.**

Les progrès de la science mathématique au 17è siècle, notamment l'introduction et l'étude de la fonctions logarithme, ont permis de traiter des problèmes de calcul en particulier en astronomie.

L'un des domaines d'application plus inattendu est celui de la conception de l'échelle musicale. C'est en effet à la fin du 17è siècle et au début du 18è siècle, que les musicologues de l'époque ont proposé l'usage de la gamme "bien tempérée" qui a fixé la norme de la musique classique à partir du milieu du 18è siècle

Au cours de l'exposé nous présenterons le problème posé par l'échelle musicale et les méthodes mathématiques mises en oeuvre : logarithme, approximation d'un nombre irrationnel par des rationnels de petit dénominateur, fractions continues. Dans une première partie nous ferons quelques rappels sur les fonctions exponentielles et logarithmes et nous introduirons la méthode de développement en fraction continue.

La fréquence des sons

Puisque nous allons parler d'échelle musicale, rappelons qu'un son est un processus vibratoire à une certaine fréquence, ou la superposition de vibrations à des fréquences différentes.

La fréquence est mesurée en hertz (symbole : Hz, unité du Système International d'unités) est définie comme la mesure de la fréquence de répétition par seconde d'un événement qui se reproduit périodiquement.

Pour un son pur (résultant d'une vibration à une seule fréquence), on peut parler de "hauteur". L'oreille humaine est capable de percevoir des sons dont la fréquence est comprise entre entre 16 et 20000 hertz. L'oreille ne distingue bien des sons de hauteurs différentes que si la différence de leur fréquence est supérieure à 1 hertz.

Le clavier du piano moderne est composé en général de 88 touches (7 octaves et quart). Les 52 touches blanches correspondent aux sept notes de la gamme diatonique de do majeur et les 36 touches noires, aux cinq notes restantes nécessaires pour constituer une gamme chromatique.

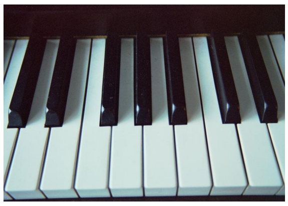

Figure 2. Clavier du piano: octave 3 du do 3 au si 3

Figure 3. Gamme diatonique de Do, échelle des touches blanches

L'échelle diatonique, ou gamme diatonique, est une échelle musicale contenant 7 degrés, composée de 5 tons et 2 demi-tons. Chaque degré porte un nom : do, ré, mi, fa, sol, la, si et à nouveau do... Dans l'échelle diatonique, en l'absence d'altération, les deux demi-tons sont situés l'un entre mi et fa, l'autre entre si et do. En divisant tous les tons en demi-tons, on obtient une échelle chromatique.

Des problèmes mathématiques se sont posés au cours de l'histoire de la musique :

Comment transformer une échelle de fréquences de multiplicative à additive ?

Dans le cas d'instruments à cordes comme le violon, l'alto, le violoncelle la hauteur en fréquence des sons peut être variée "continûment".

Ce n'est pas le cas des instruments à percusion tels que le clavecin.

Le développement des instruments à clavier (clavecin, piano) a conduit historiquement à la question :

Comment transformer une échelle "continue" en échelle "discrétisée" ?

Bien entendu, le problème n'est pas uniquement mathématique !

Historiquement le développement de la technique musicale a conduit à l'usage de différentes échelles musicales auxquelles sont associées le nom (plus ou moins mythique) de Pythagore et celui (plus proche de nous) de Zarlino (1517-1590, compositeur et théoricien de la musique de la Renaissance). A noter que l'un des élèves de Zarlino fut Vincenzo Galilei, père du fameux astronome et physicien Galilée.

Néanmoins la réponse aux questions posées passe par l'usage des fonctions exponentielles et logarithmes.

Nous allons donc commencer par étudier brièvement ces fonctions.

2. **Logarithmes et exponentielles**

2.1. **Fonctions exponentielles.**

Fonction exponentielle de base 2

Considérons la correspondance qui, à un entier naturel n, fait correspondre 2^n:

$$n \to 2^n = \underbrace{2 \times ... \times 2}_{n \text{ fois}}$$

$$0 \to 1,\ 1 \to 2,\ 2 \to 2{\times}2 = 2^2 = 4,\ 3 \to 2{\times}2{\times}2 = 2^3 = 8,\ 4 \to 2{\times}2{\times}2{\times}2 = 2^4 = 16$$

Cette correspondance définit sur les entiers naturels la fonction exponentielle de base 2. On note qu'elle vérifie $2^0 = 1$, et $2^n 2^p = 2^{n+p}$, pour tous les entiers $n, p \geq 0$.

Pour l'étendre à tous les rationnels, on définit d'abord $2^{1/p}$, pour p entier ≥ 1 : $2^{1/p}$ est l'unique nombre $y > 0$ tel que $y^p = 2$.

Puis, pour $p, q \geq 0$, on définit $2^{p/q} = (2^{1/q})^p$. Enfin on prolonge cette fonction à tous les réels $x \geq 0$.

Pour un réel $x \leq 0$, on définit 2^x par $2^x = \frac{1}{2^{-x}}$.

On obtient ainsi la fonction $x \to 2^x$ définie sur $]-\infty, +\infty[$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$.

Fonction exponentielle de base $a > 1$

Plus généralement, si a est un rel > 1, on "construit" la fonction exponentielle en base a: $x \to a^x$, définie pour $x \in \mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0, +\infty[$.

On démontre qu'elle est strictement croissante: $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ et qu'elle prend toutes les valeurs de la demi-droite $]0, +\infty[$.

Elle vérifie $a^0 = 1$, et $a^x a^y = a^{x+y}$, pour tout x et tout y réels.

2.2. **Fonctions logarithmes.**

Logarithme en base 2

Le logarithme en base 2 (ou logarithme binaire), noté $\log_2$, est la fonction réciproque de la fonction $x \to 2^x$. Le logarithme binaire de x est la puissance à laquelle le nombre 2 doit être élevé pour obtenir la valeur x, soit :

$$\log_2 x = y \Longleftrightarrow x = 2^y,\ \text{pour } x > 0.$$

La fonction $x \to \log_2 x$ est définie sur la demi-droite $]0, +\infty[$ et est à valeurs dans $]-\infty, +\infty[$.

Logarithme en base 10

C'est la fonction réciproque de la fonction $x \to 10^x$ (notée $\log_{10}$).

$$\log_{10} x = y \Longleftrightarrow x = 10^y,\ \text{pour } x > 0.$$

On a donc $\log_{10} 1 = 0$, $\log_{10} 10 = 1$, $\log_{10} \frac{1}{10} = -1$.

Logarithme en base a

Pour $a > 1$, la fonction réciproque de la fonction $x \to a^x$ est la fonction logarithme en base a (notée $\log_a$). On a donc:

$$\log_a x = y \Longleftrightarrow x = a^y, \text{ pour } x > 0.$$

En particulier, $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.

Noter que les fonctions exponentielles croissent très rapidement, les fonctions logarithmes très lentement. Par exemple $2^{10} = 1024$ et $\log_2 1024 = 10$.

Logarithme népérien

Admettons que toute fonction continue f sur un intervalle possède une primitive sur cet intervalle.

Considérons la primitive $F(x)$ sur $]0, +\infty[$ de la fonction $x \to 1/x$ qui s'annule pour $x = 1$. La fonction F est définie sur $]0, +\infty[$ et vérifie $F'(x) = \dfrac{1}{x}$.

La fonction F est appelée logarithme népérien et notée log (ou ln). Elle est continue et croissante de 0 à $+\infty$ quand x croit de 1 à $+\infty$. Il existe donc un nombre réel > 1 (noté e) appelé base du logarithme népérien, tel que $\log e = 1$.

Pour $y > 0$, on observe que la fonction $x \to F(xy)$ a pour dérivée également $\frac{1}{x}$, et diffère donc de $F(x)$ par une constante. Il en résulte que

(1) $$\log(xy) = \log(x) + \log(y), \text{ quels que soient } x, y > 0.$$

L'exponentielle de base e (notée $x \to exp(x)$ ou $x \to e^x$) est la fonction réciproque du logarithme népérien:

(2) $$\log x = y \Longleftrightarrow x = \exp(y), \text{ pour } x > 0.$$

D'après (3), on a:

(3) $$\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y), \text{ quels que soient } x, y.$$

Le logarithme népérien est ainsi dénommé d'après John Napier (1550-1617), théologien, physicien, astronome et mathématicien écossais.

Comme $x \to \log x$ est la primitive de $x \to \frac{1}{x}$, on a :

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}, \text{ pour } x \geq 1.$$

Approximation de e

Le nombre e est irrationnel et vaut un peu plus de $2,718$.

FIGURE 4. John Napier (1550 - 1617)

Parmi les rationnels de numérateur et dénominateur inférieurs à 1000, le plus proche de e est $\frac{878}{323} \sim 2,71827$.

La valeur numérique de e tronquée à 15 décimales est $2,718281828459045$.

Conversion dans le changement de base des logarithmes

$$x = 2^{\log_2 x} = 10^{\log_{10} x} = e^{\log x}$$

Donc $\log_2 x = (\log_2 10) \log_{10} x = (\log_2 e) \log x$

2.3. **Calcul de logarithmes par encadrement.**

Problème pratique: calcul de $\log x$

On se place dans la situation où l'on ne dispose pas des moyens de calcul actuels, comme au 17ème siècle. A cette époque, on utilisait déjà des algorithmes pour calculer des valeurs approchées de fonctions telles que le logarithme, mais les calculs se faisaient à la main !

Exercice: calcul d'une valeur approchée de $\log_2 7$, de $\log_2 5$ et $\log_2 10$ par encadrement dans l'échelle des puissances de 2.

$$32 = 2^5 < \quad 7 \times 7 = 49 < \ 64 = 2^6 \quad \Rightarrow 5 < \log_2 49 < 6 \quad \Rightarrow 2.5 < \log_2 7 < 3,$$

$$32 = 2^5 < \quad 2 \times 5 \times 5 = 50 < \ 64 = 2^6 \quad \Rightarrow 5 < 1 + 2\log_2 5 < 6 \quad \Rightarrow 2 < \log_2 5 < 2.5,$$

$$64 = 2^6 < \quad 5 \times 5 \times 5 = 125 < \ 128 = 2^7 \quad \Rightarrow 6 < 3\log_2 5 < 7 \quad \Rightarrow 2 < \log_2 5 < 7/3 \sim 2.33.$$

Comme 125 est proche de 128, $\log_2 5$ est proche de 7/3 qui est proche de 2.33. Ainsi on a trouvé une bonne approximation de $\log_2 5$ par un nombre décimal et par une fraction quotient de deux entiers.

Autre calcul: $2^{10} = 1024$, d'où $10 \sim \log_2 10^3 = 3 \log_2 10$, soit $\log_2 10 \sim 10/3$.

Comme $\log_2 10 = 1 + \log_2 5$, on retrouve: $\log_2 5 \sim 10/3 - 1 = 7/3$.

$$\begin{array}{ll} & 1 < 2 < \ 3 < \ 4 < \ 5 < \ 6 < \ 7 < \ 8 < \ 9 < \ 10 \\ \log_2 & 0 < 1 < \log_2 3 < 2 < \log_2 5 < 1 + \log_2 3 < \log_2 7 < 3 < 3 \times \log_2 3 < 1 + \log_2 5 \\ \sim & 0 < 1 < 1.58 < \ 2 \ < 2.33 \ < \ 2.58 \ < \ 2.83 \ < \ 3 < \ 3.16 \ < \ 3.33 \end{array}$$

3. **Fractions continues**

Fractions continues

Dans la question de la discrétisation de l'échelle musicale, on rencontre le problème de l'approximation des nombres réels par des rationnels. Le développement en fraction continue est un outil permettant de résoudre ce problème.

A) Cas des rationnels

Ce problème se pose déjà pour les rationnels que l'on veut approcher par des rationnels de petits dénominateurs.

Soient a, b deux entiers ≥ 1 avec $b \leq a$. Faisons la division euclidienne de a par b:

(4) $$a = bq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < b.$$

On peut écrire

$$b/a = \frac{b}{bq_1 + r} = \frac{1}{q_1 + \frac{r_1}{b}}.$$

Maintenant, on peut recommencer avec le couple b, r_1:

$$b = r_1 q_2 + r_2, 0 \leq r_2 < q_2.$$

$$\frac{r_1}{b} = \frac{r_1}{r_1 q_2 + r_2} = \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}, \text{ d'où: } b/a = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{r_2}{r_1}}}.$$

On continue jusquà ce que l'on trouve 0 comme reste.

Exemples:

Ecrire sous forme de fraction continues $5/7, 4/11$

$b/a = 5/7$

$7 = 5 + 2 \Rightarrow 7/5 = 1 + 2/5 \Rightarrow 5/7 = \frac{1}{1+2/5}$

$5 = 2 \times 2 + 1 \Rightarrow 2/5 = \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$.

D'où : $5/7 = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$.

Même question pour $b/a = 4/11$

$11 = 2 \times 4 + 3 \Rightarrow 11/4 = 2 + 3/4 \Rightarrow 4/11 = \frac{1}{2+3/4}$

$4 = 1 \times 3 + 1 \Rightarrow 4/3 = 1 + 1/3 \Rightarrow 3/4 = \frac{1}{1+1/3}$

$b/a = 4/11 = \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$.

Exemple: Approcher la fraction 79/112 par une fraction de dénominateur plus petit.

Ecrivons la représentation de 79/112 en fraction continue:

$$\begin{aligned}
112 = 1 \times 79 + 33 \Rightarrow 79/112 &= \frac{1}{1+\frac{33}{79}} \\
79 = 2 \times 33 + 13 \Rightarrow \frac{33}{79} &= \frac{1}{2+\frac{13}{33}} \\
33 = 2 \times 13 + 7 \Rightarrow \frac{13}{33} &= \frac{1}{2+\frac{7}{13}} \\
13 = 1 \times 7 + 6 \Rightarrow \frac{7}{13} &= \frac{1}{1+\frac{6}{7}} \\
7 = 1 \times 6 + 1 \Rightarrow \frac{6}{7} &= \frac{1}{1+\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

En reportant les résultats des étapes successives, on obtient:

$$79/112 = \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{6}}}}}}$$

Si l'on supprime le dernier terme dans le développement, on obtient la fraction

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}} = 12/17. \text{ On a } 79/112 - 12/17 = \frac{-1}{1904}.$$

B) Algorithme de fraction continue

Pour un nombre réel $x \geq 0$, notons
$[x]$ sa partie entière: $[x]$ est l'unique entier tel que $[x] \leq x < [x] + 1$,
$\{x\} = x - [x]$ sa partie fractionnaire $\in [0, 1[$. On a donc $x = [x] + \{x\}$.

Si $x = a/b$, avec a, b entiers, $0 < b \leq a$, dans la division euclidienne $a = bq_1 + r_1$, on a : $q_1 = [a/b]$, $\{a/b\}$.

Notons a et T les fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par

$$x \to a(x) = [\frac{1}{x}] \text{ et } x \to T(x) = \{\frac{1}{x}\}.$$

Soit $x \in]0,1[$. Par définition de a et de T, on a : $\dfrac{1}{x} = a(x) + T(x)$, d'où :

(5)
$$x = \frac{1}{a(x)+T(x)}.$$

Appliquée à $T(x)$, la relation (5) donne : $T(x) = \dfrac{1}{a(T(x)) + T(T(x))}$. En remplaçant $T(x)$ dans (5) par son expression ci-dessus à droite, on obtient:

$$x = \frac{1}{a(x) + \frac{1}{a(T(x))+T(T(x))}}.$$

3.1. **Développement en fraction continue, approximation par les rationnels.**

On peut alors réitérer cette construction et définir par récurrence deux suites (dépendant de x) (a_n) à valeurs entières et (x_n) dans $[0,1]$ en posant :

$x_0 = x$, et pour $n \geq 1$: $x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x)$, $a_n = [\frac{1}{x_{n-1}}] = a(T^{n-1}(x))$.

La suite des entiers (a_n) dépend de x. Pour x fixé, nous la noterons simplement (a_n). On obtient

(6)
$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n + x_n}}}.$$

Si $x = b/a$ est rationnel, cette construction s'arrête à la valeur de n pour laquelle $x_n = T^n(x) = 0$.

Si x est irrationnel, la construction se poursuit indéfiniment. Dans ce cas, on obtient donc une suite d'entiers ≥ 1: $(a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ et la formule appelée *développement en fraction continue de* x :

(7)
$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n + \cdots}}}.$$

Notation: Pour éviter d'écrire l'encombrante formule (7), on utilise la notation : $x = [0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]$.

De même que le développement décimal fournit une représentation des nombres réels, le développement en fraction continue est une autre représentation des nombres réels. (Sur les fractions continues, voir aussi la section “Compléments”.)

3.2. **Exemples de développement en fraction continue.**

1) $u = \sqrt{2} - 1$, qui est compris entre 0 et 1.

Le nombre u est la racine positive de l'équation du second degré: $x^2 + 2x - 1 = 0$, dont les racines sont: $\sqrt{2} - 1$ et $-(1 + \sqrt{2})$.

L'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$ peut s'écrire: $x = \frac{1}{2+x}$. On a donc :

$$u = \frac{1}{2+u} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+u}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+u}}} = \ldots = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\ldots+\frac{1}{2+\ldots}}}.$$

Cette représentation comme limite de fractions successives est le développement en fraction continue de $u = \sqrt{2} - 1$.

Le développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue est donc:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+\ldots+\frac{1}{2+\ldots}}}.$$

Exercice: Démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$ d'abord par un argument arithmétique, puis en utilisant son développement en fraction continue

2) *Le nombre d'or*

L'un des nombres irrationnels remarquables est le nombre d'or $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le début de son développement décimal est $1,6180339887$.

C'est la solution positive de l'équation du second degré:

$$x^2 - x - 1 = 0, \text{ dont les racines sont: } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Le nombre $c = b - 1$ est solution de $y^2 + y - 1 = 0$, soit $y(1 + y) = 1$, ou encore $y = \frac{1}{1+y}$. En utilisant l'équation dont c est solution sous cette forme, on peut écrire:

$$c = \frac{1}{1+c} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+c}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+c}}}.$$

On obtient ainsi la représentation du nombre d'or en fraction continue :

$$b = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\ldots+\frac{1}{1+\ldots}}}. \tag{8}$$

Démonstration de l'irrationalité du nombre d'or:

1) Par un argument arithmétique.

Supposons que le nombre d'or b soit rationnel. On a alors $b = p/q$, où p, q sont deux entiers, que l'on peut prendre premiers entre eux, avec $0 < q, p$. D'après l'équation vérifiée par le nombre d'or, p et q satisfont la relation:

$$p^2 - pq - q^2 = 0, \text{ soit } p(p-q) = q^2.$$

Donc p divise q, contrairement au fait qu'ils sont premiers entre eux.

2) En utilisant son développement en fraction continue.

Si le nombre d'or était un nombre rationnel, son développement en fraction continue se terminerait après un nombre fini d'itérations, contrairement à ce que montre la formule (8).

Approximation de π

Le début du développement en fraction continue de π :

$$3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14+\cdots}}}}}}}}}}}} = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14...]$$

Si l'on s'arrête dans approximation de π aux 5 premiers termes du développement en fraction continue, on obtient un bonne approximation de π :

$$\sim 3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16}} = 355/113$$

$355/113 = 3,141592...$ proche du développement de π dont les premiers termes sont: 3,141592 653 589 793.

Développement en fraction continue du nombre e (obtenu par Euler en 1737)

$$\mathrm{e} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cdots}}}}}}}} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, ..., 1, 2n, 1, ...]$$

4. la gamme

4.1. La gamme musicale.

Rappelons la question posée au début:

Comment subdiviser l'échelle musicale en gardant le même rapport de hauteur des sons pour des notes successives ?

C'est le problème de la gamme bien tempérée (le verbe "tempérer" vient du latin "temperare" et signifie ici "organiser") :

Pour pouvoir transposer facilement, il faut que le rapport des hauteurs de ton entre deux demi-tons successifs soit fixe, autrement dit que la différence des logarithmes des fréquences de deux demi-tons successifs soit fixe.

L'octave correspond au doublement de la fréquence. Entre le do3 et le do4, pour lesquels le rapport des fréquences est 2, il faut subdiviser en p intervalles égaux chacun augmentant d'un demi-ton. On veut p "raisonnablement" petit. Le rapport des fréquences entre deux degrés séparés par un demi-ton sera donc $2^{1/p}$.

On veut aussi dans la succession des tons tomber aussi près que possible du rapport $\frac{3}{2}$ (rapport de quinte, ce sera par exemple le rapport des fréquences du sol 3 et du do 3).

Il faut donc trouver k entier tel que k/p soit proche de $\log_2 3/2$.

Le développement en fraction continue va permettre de résoudre au mieux cette double exigence.

Construction de l'échelle musicale

L'oreille humaine est sensible à un écart supérieur (à peu près) à $\frac{1}{\log_2 e}\frac{1}{500}$ d'écart du logarithme en base 2 de la fréquence.

Choix pour la gamme bien tempérée :

L'octave (rapport de fréquences égal à 2) est subdivisé en douze intervalles égaux (12 demi-tons) en progression géométrique, soit $2 = r^{12}$. Le rapport de fréquences du demi-ton (à tempérament égal) est $r = 2^{1/12} \sim 1,059$.

La quinte tempérée est égale à 7 demi-tons, soit $r^7 = 2^7/12$ (environ 1,498), soit un écart de 0,11 % environ par rapport à la quinte juste dont le rapport est $3/2 = 1,5$.

Le la est à 440 Hz

note	gamme de Zarlino	gamme de Pythagore	gamme tempérée
do	$264,00$	$260,74$	$261,63$
do dièse	$275,00$	$278,44$	$277,18$
ré	$297,00$	$293,33$	$293,66$
mi bémol	$316,80$	$309,03$	$311,13$
mi	$330,00$	$330,00$	$329,63$
fa	$352,00$	$347,65$	$349,23$.
fa dièse	$371,25$	$371,25$	$369,99$
sol	$396,00$	$391,11$	$392,00$
sol dièse	$412,50$	$417,66$	$415,30$
la	$440,00$	$440,00$	$440,00$
si bémol	$475,20$	$463,54$	$466,16$
si	$495,00$	$495,00$	$493,88$
do	$528,00$	$521,48$	$523,25$

4.2. **Pourquoi 12 et 7 ?**

Nous allons maintenant “expliquer” pourquoi ce choix de 12 et de 7.

Exercice: $\log_2(\frac{3}{2})$ n'est pas un nombre rationnel.

Ceci veut dire qu'il n'existe pas de nombres entiers k et $p \geq 1$ tels que $\log_2(\frac{3}{2}) = \frac{k}{p}$.

Démonstration: Supposons au contraire qu'il existe deux nombres entiers k et $p \geq 1$ tels que $\log_2(\frac{3}{2}) = \frac{k}{p}$. D'après la définition du logarithme en base 2, cette relation équivaut à :

$$\frac{3}{2} = 2^{\frac{k}{p}}, \text{ soit } (\frac{3}{2})^p = 2^k \text{ et donc } 3^p = 2^p \times 2^k = 2^{k+p}.$$

La dernière relation implique que 2 divise 3^p, donc divise 3, ce qui est impossible. $\square$

Puisque $\log_2(\frac{3}{2})$ est un nombre irrationnel, on va le remplacer par une approximation rationnelle, à savoir un développement décimal à l'ordre 3.

Le logarithme en base 2 de $\frac{3}{2}$ est à peu près 0.585. Plus précisément, on a :

$$\log_2(\frac{3}{2}) = 0.584962...,$$

ce qui montre que si l'on remplace $\log_2(\frac{3}{2})$ par 0.585, on commet une erreur inférieure à 4×10^{-5}.

Le problème est d'exprimer $585/1000 = 117/200$ comme un quotient de deux entiers k et p aussi petits que possible avec une erreur aussi petite que possible.

$200 = 117 + 83 \Rightarrow 117/200 = \frac{1}{1+83/117}$

$117 = 83 + 34 \Rightarrow 83/117 = \frac{1}{1+34/83}$

$83 = 2 \times 34 + 15 \Rightarrow 34/83 = \frac{1}{2+15/34}$

$34 = 2 \times 15 + 4 \Rightarrow 15/34 = \frac{1}{2+4/15}$

$15 = 3 \times 4 + 3 \Rightarrow 4/15 = \frac{1}{3+3/4}$

$4 = 3 + 1 \Rightarrow 3/4 = \frac{1}{1+1/3}$

D'où en substituant:

$$\begin{aligned} 117/200 &= \frac{1}{1+83/117} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+34/83}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+15/34}}} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+4/15}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{3+3/4}}}}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+1/3}}}}}} \end{aligned}$$

Les approximations successives de 117/200 sont:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1}} = 1/2,\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = 3/5,\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}} = 7/12,\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}}}} = 24/41,$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1}}}}}} = 31/53,\ \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+1/3}}}}}} = 117/200.$$

L'approximation de 117/200 par 7/12 donne une erreur de $117/200 - 7/12 = 1/600$.

En conclusion, on a montré que l'approximation $\log_2 3/2$ de par 7/12 n'introduit qu'une erreur de l'ordre de 1/500, qui est inférieure à la capacité de l'oreille humaine à distinguer deux sons dont la fréquence diffère de moins de 1Hz.

En effet, soient deux sons de fréquences proches f_1, f_2. L'oreille ne les distingue pas si $|f_1 - f_2| < 1$. Par ailleurs ces fréquences sont au moins de l'ordre de 100 Hz.

Pour t petit et $u = 1 + t$, $\log u = t + \varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ est une erreur négligeable devant t.

La condition $|f_1 - f_2| < 1$ s'écrit $f_1/f_2 - 1 = v$, avec $|v| < 1/f_2$. D'où $\log f_1 - \log f_2 = \log(1+v) \sim v$ et donc $|\log f_1 - \log f_2| \leq 1/f_2 \leq 1/100$. Pour une fréquence supérieure à 100 Hz, une erreur sur le log des fréquences inférieure à 1/500 ne sera donc pas percue à l'oreille.

On voit ainsi que l'erreur sur le log des fréquences est inférieure à l'acuité auditive.

5. **Compléments**

5.1. **Sur les fractions continues.**

Compléments sur les fractions continues

Reprenons la relation (7) de développement en fraction continue. Rappelons qu'elle s'écrit:

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}}. \tag{9}$$

Si nous nous arrêtons à l'étape n dans la formule (9), nous obtenons une fraction qui est le quotient de deux entiers (dépendant de x) $p_n(x)$ et $q_n(x)$, notés simplement p_n et q_n:

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

et qui est une approximation de $\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}}$.

On montre que les suites $(p_n), (q_n), (a_n)$ vérifient les relations de récurrence suivantes:

$p_{-1} = 1$, $p_0 = 0$, $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$ et pour $n \geq 0$:

$$p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}, \tag{10}$$

$$q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}. \tag{11}$$

En effet, si dans une fraction $\frac{p+p'x}{q+q'x}$, on remplace x par $\frac{1}{a+y}$, on obtient:

$$\frac{p + p'\frac{1}{a+y}}{q + q'\frac{1}{a+y}} = \frac{ap + p' + py}{aq + q' + qy}. \tag{12}$$

La relation (6) s'écrit

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + x_n}}}.$$

Si l'on fait un pas de plus dans l'algorithme de fraction continue et si l'on remplace x_n par $\frac{1}{a_{n+1} + x_{n+1}}$, on trouve, d'après (12) :

$$x = \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1} + p_n x_{n+1}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1} + q_n x_{n+1}} = \frac{p_{n+1} + p_n x_{n+1}}{q_{n+1} + q_n x_{n+1}},$$

ce qui montre les relations (10) et (11).

Exercice: Déduire de (10) et (11) que

$(-1)^n = p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}$

Montrer que p_n et q_n sont premiers entre eux.

Montrer que deux q_n consécutifs sont premiers entre eux.

Nous pouvons maintenant évaluer quelle est la précision de l'approximation de x par p_n/q_n.
Par monotonicité, il résulte de la relation (6) que l'on a (suivant la parité de n):

$$\frac{p_n}{q_n} < x < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}, \text{ ou } \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < x < \frac{p_n}{q_n},$$

Comme $|p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n| = 1$, pour tout n, on a : $|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}$. D'où :

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Cette inégalité montre en particulier la convergence de la suite $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x, ce qui justifie l'écriture de x sous la forme de son "développement" en fraction continue (qui s'arrête si x est rationnel) donné par (9).

On a ainsi montré que tout x irrationnel dans $]0,1[$ peut être représenté par la fraction continue :

$$x = \lim_n \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \ddots + \cfrac{1}{a_n(x) + \ddots}}}.$$

FIGURE 5. Jean-Sébastien Bach (1685-1750)

5.2. **Bach.**

Le "Clavecin bien tempéré", composé par J.-S. Bach,
illustre l'usage de la gamme bien tempérée dans l'écriture musicale.