Les Relations d'Équivalences

Marc Abboud
Séance Rennes et Maths

5 mars 2022

1 Définitions et premiers exemples.

En mathématiques, une des premières choses que l'on fait c'est construire des objets et les étudier. Seulement voilà si parfois deux objets paraissent un peu différent, au vu de certaines propriétés ils ont l'air de se comporter de la même manière. Par exemple, si je prends l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et l'ensemble $\{a, b, c\}$, ils ne sont pas *strictement* égaux mais j'ai quand même envie de dire que manipuler l'un ou l'autre revient au même quand je ne considère que la taille de mes ensembles.

Un autre exemple plus simple est le cas des fractions, tout le monde sait que $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, mais ce n'est pas strictement vrai car le terme de gauche est représenté par un 2 et un 6 et celui de droite par un 1 et un 3, seulement on a su définir une "égalité" qui permet d'identifier ces deux termes. Cette nouvelle égalité est ce qu'on appelle une relation d'équivalence.

Les trois propriétés de l'égalité est que $x = x$, si $x = y$ alors $y = x$ et enfin si $x = y$ et $y = z$ alors $x = z$. Et on part de ça pour définir les relations d'équivalences.

Définition 1.1. Soit E un ensemble, une relation d'équivalence sur E est un sous-ensemble $\mathcal{R}$ de $E \times E$ (on notera $x\mathcal{R}y$ pour $(x, y) \in \mathcal{R}$) telle que
-(Réflexivité) Pour tout $x \in E, x\mathcal{R}x$.
-(Symétrie) Pour tout $x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
-(Transitivité) Pour tout $x, y, z \in E$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.
Si $x\mathcal{R}y$, on dit que x est *en relation* avec y.

Dans la suite, on notera plutôt $x \sim y$ pour les relations d'équivalences.

Exercice 1. On considère la classe des ensembles finis(et oui l'ensemble des ensembles n'existe pas...). Soient X, Y deux ensembles, on définit la relation $X \sim Y \Leftrightarrow \operatorname{Card} X = \operatorname{Card} Y$. Montrer que c'est une relation d'équivalence.

Remarque 1.2. On peut en fait définir cette relation d'équivalence pour les ensembles infinis aussi mais ça prendrait une séance du club...

Exercice 2. Déterminer l'erreur dans le raisonnement suivant : Si $\mathcal{R}$ est une relation sur E qui est symétrique et transitive, alors elle est réflexive car pour tout $x, y \in E$, on a $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ et $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x\mathcal{R}x$.

Exercice 3. On travaille sur $\mathbf{Z}$, soit $n \geq 2$ un entier. On définit la relation $\sim_n$ par : pour tout $x, y \in \mathbf{Z}, x \sim_n y \Leftrightarrow n$ divise $y - x$. Montrer que c'est une relation d'équivalence sur $\mathbf{Z}$ (elle doit être familière pour celles et ceux en terminale...). Montrer de plus que si $a \sim_n b$ et $c \sim_n d$, alors $a + c \sim_n b + d$ et $ac \sim_n bd$ (on verra plus tard pourquoi c'est vrai dans un contexte plus général avec les groupes et les anneaux).

Typiquement, on voit qu'avec cette relation d'équivalence tous les nombres de la forme $kn + 1$ sont "égaux" et ce qui importe finalement c'est uniquement le reste dans la division euclidienne par n.

Exercice 4. Soit $E = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$, on considère la relation $f \sim g \Leftrightarrow$ il existe un ensemble fini $A \subset \mathbf{R}$ tel que $f - g = 0$ sur $\mathbf{R} \setminus A$. Montrer que c'est une relation d'équivalence.

Exercice 5. Soit $E = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$, on considère la relation $f \simeq g \Leftrightarrow \exists M > 0, |f - g| \leq M$ montrer que c'est une relation d'équivalence.

Définition 1.3. Soit E un ensemble. Une partie de E est un sous-ensemble de E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Une *partition* Π de E est la donnée d'un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$ tel que

— Pour tout $A \in \Pi$, $A \neq \emptyset$.
— Pour tout $A, B \in \Pi, A \cap B = \emptyset$.
— $\bigcup_{A\in\Pi} A = E$.

Exercice 6. Donner toutes les partitions de $\{1, 2, 3\}$.

Exercice 7 (Classe d'équivalence)**.** Soit E un ensemble et $\sim$ une relation d'équivalence sur E. Pour tout $x \in E$, on définit $C_x := \{y \in E \mid x \sim y\}$, c'est la classe d'équivalence de x. Montrer que

1. Pour tout $x \in E, C_x$ n'est pas vide.
2. Pour tout $x, y \in E$, on a les deux possibilités suivantes : $C_x \cap C_y = \emptyset$ ou bien $C_x = C_y$.
3. Montrer que $E = \bigcup_{x\in E} C_x$.

On voit donc que les classes d'équivalences d'une relation d'équivalence forment une partition.

On note $E/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence sur E.

Exercice 8. On définit sur $\mathbf{R}$ la relation $x \sim y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Donner la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbf{R}$.

Exercice 9. Montrer que se donner une relation d'équivalence sur un ensemble E revient à se donner une partition de E. Plus précisément, montrer qu'à partir d'une relation d'équivalence on peut construire une partition de E et montrer qu'à partir d'une partition de E on peut construire une relation d'équivalence sur E et que ces deux procédés sont inverse l'un de l'autre.

Exercice 10. Décrire $\mathbf{Z}/\sim_n$.

Exercice 11. On considère le plan $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et la relation $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbf{R}^*, (x, y) = \lambda(x', y')$. Et on note $\mathbf{P}^1\mathbf{R} = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \sim$. Donner une interprétation géométrique de $\sim$ et montrer que $\mathbf{P}^1\mathbf{R}$ peut se voir comme la droite des réels avec un point à l'infini.

2 Quotient de groupes, d'anneaux

Définition 2.1. Soit G un ensemble muni d'une loi $\cdot$, G est un groupe commutatif si

— (élément neutre) Il existe $e \in G$ tel que $\forall g \in G, e \cdot g = g \cdot e = g$.
— (associativité) Pour tout $x, y, z \in G, x(yz) = (xy)z$
— (existence d'un inverse) Pour tout $x \in G, \exists y \in G, xy = yx = e$.
— Pour tout $x, y \in G, xy = yx$.

Remarque 2.2. Avec des notations multiplicatives, on notera 1 l'élément neutre. On peut aussi travailler en notation additive et dans ce cas $e = 0$.

De même, l'inverse d'un élément x sera noté x^{-1} ou $-x$ selon que l'on utilise la notation additive ou multiplicative.

Définition 2.3. Soit G un groupe et H une partie de G. On dit que H est un sous-groupe de G si

— $1_G \in H$.
— Pour tout $x, y \in H, xy \in H$.
— Pour tout $x \in H, x^{-1} \in H$.

Exercice 12. Montrer que dans un groupe, l'élément neutre est unique.

Exercice 13. Montrer que $(\mathbf{Z},+)$ est un groupe. Est-ce que $(\mathbf{Z},\times)$ est un groupe ? Est-ce que $(\mathbf{R},\times)$ est un groupe ?

Définition 2.4. Soit G un groupe abélien et H un sous-groupe de G. On définit la relation suivante :

$$\forall x, y \in G, x \sim_H y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$$

Exercice 14.
1. Montrer que $\sim_H$ est une relation d'équivalence.
2. Montrer que $G/H := G/\sim_H$ est un groupe avec l'opération $\forall x, y \in G, C_x \cdot C_y = C_{xy}$. Quel est l'élément neutre ? Montrer que les éléments de H sont "tués" dans G/H.
3. Reprendre l'exemple avec $G = \mathbf{Z}$ et $H = n\mathbf{Z}$.

Exercice 15. Soit $\mathbf{K} = \mathbf{C}, \mathbf{R}$ ou $\mathbf{Q}$. Montrer que $\mathbf{K}^*$ est un groupe pour la loi de multiplication. Montrer que $(\mathbf{K}^*)^2 = \left\{x \in \mathbf{K}^* \;\middle|\; \exists y \in \mathbf{K}^*, y^2 = x\right\}$ est un sous-groupe de $\mathbf{K}^*$. Décrire $\mathbf{K}^*/(\mathbf{K}^*)^2$. (Indice : tout polynôme de degré 2 a une racine dans $\mathbf{C}$).

Définition 2.5. On dit que $(A,+,\times)$ est un anneau si
- Si $(A,+)$ est un groupe.
- (associativité) $\forall a, b, c \in A, a(bc) = (ab)c$.
- (distributivité) $\forall a, b, c \in A, a(b+c) = ab + ac$.
- Il existe un élément $1_A \in A$ qui est le neutre pour la multiplication.
- La multiplication est commutative.

De plus, on dit que A est un corps si tout élément non nul admet un inverse pour la multiplication.

Exercice 16. Montrer que $\mathbf{Z}$ est un anneau, est-ce que c'est un corps ?
Soit K un corps. Montrer que $K \times K$ n'est pas un corps (préciser la loi d'anneau).

Exercice 17. Soit A un anneau et $a, b \in A$, on dit que a divise b s'il existe $c \in A$ tel que $b = ac$. Soit $f \in A$. On pose la relation sur A : $a \sim b \Leftrightarrow a - b$ est divisible par f.
1. Montrer que c'est une relation d'équivalence.
2. Montrer que si $a_1 \sim b_1$ et $a_2 \sim b_2$, alors $a_1a_2 \sim b_1b_2$. Faire le parallèle avec le cas $A = \mathbf{Z}$.
3. On note (f) l'ensemble des éléments divisibles par f. Montrer que c'est un sous-groupe de $(A,+)$.

Exercice 18 (Quotient)**.** On peut faire la même chose avec les anneaux. Soit A un anneau et $f \in A$. On définit l'anneau quotient $A/(f)$ en faisant le quotient de groupe $(A,+)/(f)$, montrer que cet ensemble a bien la structure d'anneau que l'on veut.

Maintenant reprenez l'exemple avec $A = \mathbf{Z}$ et $I = n\mathbf{Z}$, montrer que dans le cas où n est premier $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un corps (fini !) (Indice : utiliser le théorème de Bézout).

Exercice 19. On considère l'anneau $\mathbf{Z}[X]$ et f un polynôme à coefficients entiers. Montrer que $\mathbf{Z}[X]/(f) = \mathbf{Z}[\alpha]$ avec α une racine de f.

Ceci vous montre pourquoi les quotients dans les anneaux sont très important, c'est comme ça que l'on construit des espaces dans lesquels des équations polynomiales ont des solutions quand il n'y en a pas au départ.

Exercice 20.
1. Montrer que $\mathbf{Q}$ n'admet pas de solutions pour l'équation $x^2 = 2$.
2. Résoudre dans $\mathbf{Z}$ l'équation $x^2 - 1 = y^3$ avec x pair.

Remarque 2.6. Que faire maintenant si on remplace $x^2 - 1$ par $x^2 + 1$?, on a envie de faire la même chose. Mais il faudrait pouvoir factoriser $x^2 + 1 = (x - t)(x + t)$ avec t une racine carré de -1....

3 La construction de $\mathbf{C}$

On va admettre que $\mathbf{Z}$ a déjà était construit. Construisons $\mathbf{Q}$.

Exercice 21. Montrer que $\mathbf{Q} = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*/\sim$ avec $\sim$ une relation d'équivalence à préciser. Montrer que c'est un anneau, puis que c'est un corps.

On travaille maintenant sur $\mathbf{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

Exercice 22. On pose $\mathbf{C} = \mathbf{R}[X]/(X^2+1)$ et on note i la classe d'équivalence de X. Montrer que $i^2 = -1$.

<++>