# CLUB DE MATHÉMATIQUES

***

# SUR LES NOMBRES IRRATIONNELS, APPROXIMATION ET QUELQUES QUESTIONS

Jean-Pierre Conze (Université de Rennes 1)

RÉSUMÉ. La notion de nombre et la nature des nombres (rationnels/irrationnels) ont eu une grande importance dans le développement des mathématiques depuis l'antiquité grecque et la découverte de l'irrationalité de certains nombres associés à la géométrie, comme $\sqrt{2}$.

Dans la session, nous discuterons cette question d'irrationalité (représentation et approximation des nombres irrationnels) et nous l'illustrerons à travers des questions mathématiques simples les mettant en jeu.

TABLE DES MATIÈRES



*Date*: 4 décembre 2021.

# 1. Nombres irrationnels

## 1.1. Nombres rationnels et nombres irrationnels : un peu d'histoire.

Tout commence par les nombres entiers : 1, 2, 3, ... Les nombres entiers permettent de faire des dénombrements, compter le nombre d'objets dans une collection. Mais pour mesurer les proportions, les entiers ne suffisent pas : il faut introduire les rapports (ou quotients) de nombres entiers, et donc les nombres rationnels.

Un nombre rationnel est le quotient de deux entiers, autrement dit une "fraction". Si $r$ est un nombre rationnel, on peut l'écrire $r = \frac{a}{b}$, où $a$ et $b$ sont deux entiers, avec $b \neq 0$. On peut supposer $b > 0$. De plus, comme on peut factoriser $a$ et $b$ par leur pgcd, on peut écrire $r = \frac{a}{b}$ avec $a$ et $b$ premiers entre eux ($pgcd(a, b) = 1$).

Dans l'antiquité, on a travaillé avec les fractions, quitte à utiliser une approximation rationnelle pour des nombres irrationnels : par exemple, dans l'Egypte antique, l'approximation de $\pi$ par $256/81$, soit environ $3,16$, ce qui est une assez bonne approximation de $\pi$. On montrera beaucoup plus tard (au 18ème siècle) que $\pi$ n'est pas rationnel.

Mais au cinquième siècle avant notre ère, les mathématiciens grecs de l'antiquité, qui faisaient de la géométrie, ont fait une découverte embarrassante : la diagonale d'un carré dont les côtés sont de longueur 1 dans une unité de mesure ont une diagonale dont la longueur $\sqrt{2}$ dans cette même unité de mesure n'est pas le quotient de deux entiers, autrement dit n'est pas un nombre rationnel.

On attribue au mathématicien grec de l'école pythagoricienne, Théodore de Cyrène (ville de la Libye actuelle), qui a vécu (c'est une hypothèse) entre 465 et 398 av. J.-C., la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Nous reviendrons sur cette preuve.

### Quelques mots sur l'étymologie et un peu d'histoire

Pour désigner ces nombres qui ne sont pas le quotient de deux entiers et que nous appelons "irrationnels", les grecs ont utilisé des termes qui signifient "inexprimable", "incommensurable", ou encore "qui ne peut former de rapport", ce qui correspond à notre terminologie "irrationnel". (Ces informations sont tirées de pages de Wikipédia.)

Le terme "nombres sourds" est utilisé au 18ème siècle pour signifier qu'il s'agit de nombres qui ne peuvent être exprimés,

Le mot "rationnel", comme le mot "raison", vient du latin "ratio", qui a désigné d'abord une "mesure", un "calcul", la "faculté de compter ou de raisonner", une "explication".

Le terme "ratio" en mathématiques continue d'être utilisé pour signifier "rapport entre deux nombres". Il s'agit donc bien du premier sens du mot "ratio".

La terminologie employée montre que l'usage des nombres irrationnels a mis du temps à être accepté par les mathématiciens, malgré les progrès apportés au Moyen Âge par les scientifiques arabo-persans, par exemple par Al-Khwârismî qui, originaire du Khwarezm, a vécu entre 780 et 850 et dont le nom a donné à l'époque moderne le terme "algorithme".

### 1.2. **Un précurseur au 14ième siècle.**

Un autre jalon important dans la compréhension de la nature mathématique des nombres et de l'irrationalité se trouve dans l'oeuvre scientifique de Nicolas Oresme (à son époque on disait Nicole Oresme), qui a vécu en Normandie et à Paris de 1320 à 1382. Ce grand lettré du Moyen Âge a été un précurseur dans plusieurs domaines.

Citons un extrait d'un article d'Alain Costé (Université de Caen, janvier 1997).

*"... Nicole Oresme introduit pour la première fois la notion de puissance d'un nombre d'exposant fractionnaire avec une notation déjà voisine de la nôtre. Il va même jusqu'à inventer la notion de puissance d'exposant irrationnel en appliquant un principe de continuité. Bien avant l'invention des logarithmes, il affirme qu'étant donnés deux nombres $x$ et $y$ (strictement positifs), il existe toujours un exposant rationnel ou irrationnel $u$ tel que $x$ élevé à la puissance $u$ soit égal à $y$ (i.e., $y = x^u$).*

*"Dans le cas ou $x$ et $y$ sont des nombres entiers, il déduit par un raisonnement d'arithmétique élémentaire que la condition pour que l'exposant $u$ soit rationnel (i.e., $\log y/\log x$ rationnel) est que les décompositions en produit de nombres premiers de $x$ et de $y$ contiennent les mêmes nombres. Il en tire la conclusion que si $x$ et $y$ sont choisis au hasard, il est plus probable que $u$ soit irrationnel plutôt que rationnel. Cela le conduit à penser que lorsqu'un nombre inconnu intervient dans une situation naturelle, il y a de fortes chances que celui-ci soit irrationnel.*

*"Cette remarque est à la base de son argumentation mathématique contre les prédictions astrologiques. Il considère le schéma simple de deux planètes parcourant des orbites circulaires et concentriques avec des vitesses uniformes. Si le rapport des vitesses de rotation des planètes est rationnel, les conjonctions de ces planètes se produiront périodiquement ... (comme pour les deux aiguilles d'une horloge, où la grande recouvre la petite tous les onzièmes d'heure).*

*"Mais si, ce qui est le plus probable selon la remarque précédente, le rapport des vitesses de rotation des deux planètes est irrationnel, les positions futures des conjonctions dépendent alors des décimales lointaines de ce rapport inconnu (à l'époque d'Oresme) des vitesses de rotation. De ce fait ces positions sont impossibles à prévoir à long terme. Ce qui vide de toute substance les affirmations des astrologues.*

*"Même si ces arguments n'ont pas dû ébranler les astrologues dans leurs convictions, il n'en reste pas moins vrai qu'à cette occasion Nicole Oresme nous dévoile la profondeur de sa pensée mathématique.*

*"En particulier concernant l'affirmation de la prépondérance des nombres irrationnels sur les rationnels, il faudra attendre la fin du XIXème siècle pour voir ce résultat clairement précisé et démontré.*

Naturellement l'analyse, que nous venons de lire, est moderne et n'a pas été formulée en ces termes par Oresme. Mais il faut souligner le rôle novateur qu'a joué ce grand penseur du 14ème siècle, tant pour les idées que pour leur diffusion, puisqu'il a été notamment à l'origine de introduction de plusieurs termes scientifiques employés de nos jours.

Après cette incursion dans un Moyen Âge déjà précurseur, revenons à Théodore de Cyrène et à ses racines carrées.

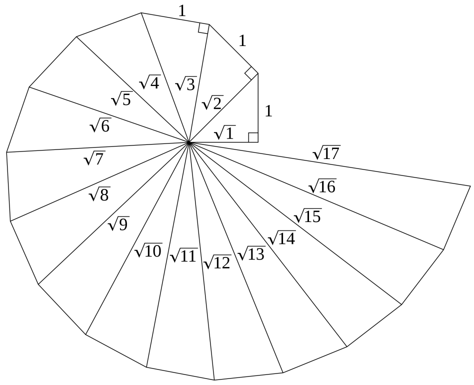


FIGURE 1. spirale dite de Théodore de Cyrène, pour obtenir les racines carrées de 2 à 17

Les nombres irrationnels dans la liste sont

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{6},\ \sqrt{7},\ \sqrt{8},\ \sqrt{10},\ \sqrt{11},\ \sqrt{12},\ \sqrt{13},\ \sqrt{14},\ \sqrt{15},\ \sqrt{17}.$$

Comment est obtenue cette figure (proposée à la Renaissance pour illustrer les travaux de Théodore de Cyrène) ?

On part du triangle rectangle dont les côtés valent 1 et, d'après la formule de Pythagore, l'hypoténuse vaut $\sqrt{2}$. Cette l'hypoténuse forme un côté d'un nouveau triangle rectangle dont l'autre côté mesure 1 et, donc l'hypoténuse du deuxième triangle vaut $\sqrt{3}$. On itère cette construction.

1.3. **Irrationalité de $\sqrt{2}$.** Prenons l'exemple de $\sqrt{2}$. Comment montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel ? Nous allons donner plusieurs démonstrations.

Preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ (première démonstration) :

En développant, on obtient l'identité :

$$(2v-u)^2 - 2(u-v)^2 \equiv 2v^2 - u^2, \text{ quels que soient } u, v. \tag{1}$$

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel :

$$\sqrt{2} = p/q, \text{ où } p, q \text{ sont deux entiers, avec } 0 < q < p, \text{ et donc } p^2 = 2q^2.$$

Dans cette représentation de $\sqrt{2}$, si elle existe, on peut prendre pour $q$ le plus petit entier $> 0$ possible. Notons que $p < 2q$, car $p^2 = 2q^2 < 2qp$.

D'après l'identité (1), en faisant $u = p$, $v = q$ dans cette identité, on obtient :

$$(2q-p)^2 - 2(p-q)^2 = 2q^2 - p^2 = 0,$$

et donc : $\sqrt{2} = \dfrac{2q-p}{p-q}$. Mais comme $0 < p-q < q$, cette égalité contredit le fait que $q$ a été choisi comme étant le plus petit entier $> 0$ possible.

Ce type d'argument repose sur le principe que tout ensemble non vide d'entiers positifs a un élément inférieur ou égal aux autres.

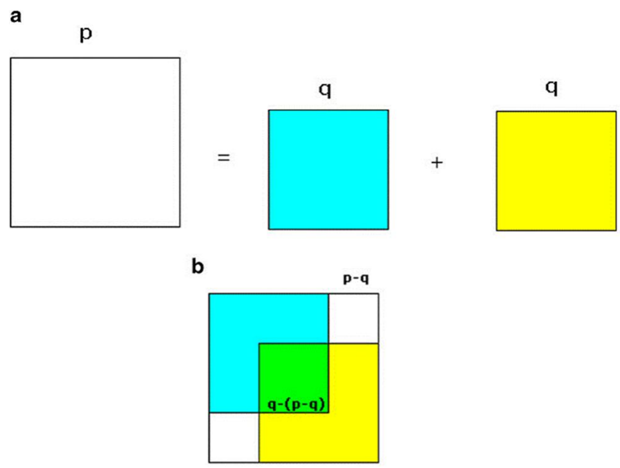


FIGURE 2. (d'après J. Conway et J. Shipman, mai 2013) (peut-être la preuve "géométrique" donnée par Théodore de Cyrène !).

## Interprétation géométrique

Supposons vérifiée la relation $p^2 = 2q^2$, avec $p, q$ entiers $> 0$. Cette relation est traduite géométriquement sur la figure 2. Elle équivaut à affirmer qu'un carré $p \times p$ a la même aire que deux carrés $q \times q$. On suppose donc que le grand carré à gauche (figure a) a un côté de longueur $p$ (le plus petit entier $p > 0$ possible), de même aire que les deux carrés plus petits de côté entier $q$ à droite. En plaçant les deux carrés de côté $q$ dans des coins opposés, nous obtenons la figure b, dans laquelle le carré central a la même surface totale que les deux petits carrés non couverts. On retrouve la situation de départ, mais avec une longueur de côté strictement plus petite, ce qui est contradictoire.

*Exercice* : en utilisant l'identité :

$$(2u-3v)^2 - 3(2v-u)^2 \equiv u^2 - 3v^2, \text{ quels que soient } u, v. \tag{2}$$

montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

## Deuxième démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ :

On utilise le

**Lemme de Gauss** : *Soient $a, b$ et $c$ trois entiers. Si $a$ divise le produit $bc$ et si $a$ est premier avec $b$, alors $a$ divise $c$.*

Supposons que $\sqrt{2}$ soit rationnel et donc comme précédemment

$$p^2 = 2q^2, \text{ où } p, q \text{ sont deux entiers, avec } 0 < q < p.$$

Quitte à diviser par le carré du pgcd de $p$ et $q$, on peut supposer que $p$ et $q$ sont premiers entre eux.

Par le lemme de Gauss, $q$, qui divise $2q^2 = p^2$, divise $p$, donc $q = 1$, car $p$ et $q$ sont premiers entre eux. ce qui est impossible.

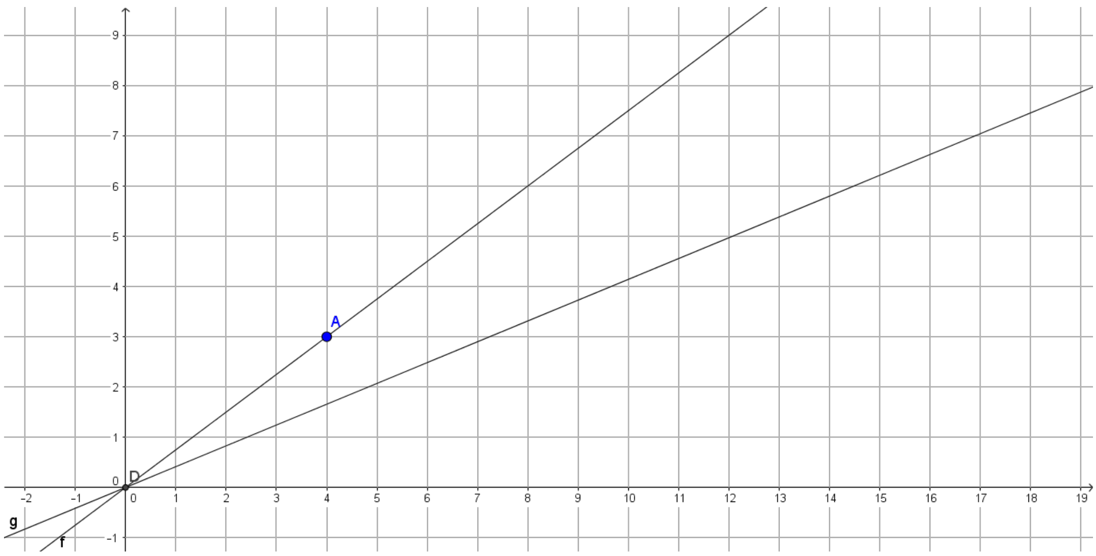


FIGURE 3. Deux droites dans un réseau périodique

## 1.4. **Un exemple de question géométrique : sur le parcours d'une bille.**

Appelons "réseau" l'ensemble $R$ des points à coordonnées entières $(q, p)$.

La droite $f$, issue de l'origine et de pente rationnelle $\lambda_1 = 3/4$ passe par le point de coordonnées $(4, 3)$ et par tous les points de coordonnées $(4k, 3k)$.

La droite $g$, issue de l'origine et de pente irrationnelle $\lambda_2 = \sqrt{2} - 1$, passe-t-elle par un point de coordonnées entières $(q, p)$ autre que l'origine $(0, 0)$ ?

Non, sinon $\lambda_2$ serait rationnel.

*Question* : une (petite) bille lancée de l'origine et animée d'un mouvement rectiligne de pente $\lambda_2$ s'approche-t-elle d'aussi près que l'on veut du réseau $R$ à part $(0, 0)$ ? Si elle a une dimension non nulle, passe-t-elle par des points du réseau autres que l'origine ?

Oui : c'est ce que nous allons voir.

## 2. Représentations et approximation des irrationnels

### 2.1. Approximation par les rationnels.

Pour répondre aux questions, il nous faut des informations sur la représentation des nombres réels, les propriétés des irrationnels et en particulier leur approximation par les rationnels.

**Développement dans une base entière**

Rappelons d'abord qu'une façon pratique de représenter les nombres réels est donnée par leur développement dans une base entière. On utilise généralement la base 10.

Tout rationnel a un développement périodique à partir d'un certain rang dans toute base et réciproquement. (Nous admettrons ce résultat.)

Par exemple $4/11 = 0,3636363636...$. Le développement se prolonge indéfiniment, périodiquement avec répétition du bloc “36”.

Une valeur approchée de $\sqrt{2}$ est 1,414 213 562. Voici une meilleure approximation.

1, 414 213 562 373 095 048 801 688 724 209 698 078 569 671 875 376 948 073 176

On constate qu'il n'y a pas de périodicité au moins dans la suite des 58 premiers termes du développement décimal.

### 2.2. Application de la densité modulo 1 des multiples d'un irrationnel.

Pour un nombre réel $x \geq 0$, notons
$[x]$ sa partie entière : $[x]$ est l'unique entier tel que $[x] \leq x < [x]+1$.
$\{x\} = x - [x]$ sa partie fractionnaire qui est dans $[0,1[$. On a donc $x = [x] + \{x\}$.

Montrons qu'il existe de “bonnes” approximations de $\alpha$ par des nombres rationnels $p/q$.

**Théorème 2.1.** *(approximation par un rationnel) Soit $\alpha$ un nombre irrationnel.*

*Pour tout $N \geq 1$, il existe $p, q$ entiers premiers entre eux, tels que $1 \leq q \leq N$ et*

$$0 < \{q\alpha\} \leq \frac{1}{N}, \quad 0 < |\alpha - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{qN}. \tag{3}$$

*Il existe une suite de couples d'entiers $(p_n, q_n)$ premiers entre eux, $q_n \geq 1$, tels que la suite $(|q_n\alpha - p_n|, n \geq 1)$ soit strictement décroissante et*

$$|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n^2}. \tag{4}$$

*Preuve* : Découpons le segment $[0,1[$ en sous-intervalles $[\frac{r}{N}, \frac{r+1}{N}[$, $r = 0, 1, ..., N-1$ et considérons la suites des points $\{0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, ..., \{N\alpha\}\}$.

Ces points sont distincts, car si deux d'entre eux coincidaient, soit $\{k_1\alpha\} = \{k_2\alpha\}$, où $k_1$ et $k_2$ sont deux entiers distincts, on aurait $k_1\alpha - [k_1\alpha] = k_2\alpha - [k_2\alpha]$ et donc $\alpha = \dfrac{[k_1\alpha] - [k_2\alpha]}{k_1 - k_2}$, ce qui entraînerait que $\alpha$ est rationnel, contrairement à l'hypothèse.

Appliquons maintenant le “principe des tiroirs” : s'il y a $N+1$ différentes chaussettes dans $N$ tiroirs, nécessairement il y en a au moins deux dans le même tiroir.

Ceci montre qu'il existe un entier $r \leq N$ et deux entiers différents $k_1, k_2$ tels que $\{k_1\alpha\}$ et $\{k_2\alpha\}$ sont dans le même intervalle $[\frac{r}{N}, \frac{r+1}{N}[$ et donc à une distance $< \frac{1}{N}$.

d'où : $|\{k_1\alpha\} - \{k_2\alpha\}| < \frac{1}{N}$, ce qui implique :

$$0 < |(k_1\alpha - [k_1\alpha]) - (k_2\alpha - [k_2\alpha])| = |(k_1 - k_2)\alpha - ([k_1\alpha] - [k_2\alpha])| < \frac{1}{N}.$$

On peut supposer $k_1 > k_2$. Posons $q = k_1 - k_2$ et $p = [k_1\alpha] - [k_2\alpha]$. Il est clair que $q < N$. Par l'inégalité précédente, nous avons :

$$0 < \{q\alpha\} \leq \frac{1}{N}, \quad 0 < |q\alpha - p| < \frac{1}{N}.$$

Il reste à voir que l'on peut prendre $p$ et $q$ premiers entre eux. Si $m \geq 1$ est le pgcd de $p$ et $q$, on a $p = mp'$, $q = mq'$, et l'inégalité précédente s'écrit :

$$|q'\alpha - p'| \leq \frac{1}{mN} \leq \frac{1}{N}, \text{ avec } p' \text{ et } q' \text{ premiers entre eux.}$$

Montrons (3). Supposons construits jusqu'à un rang $L$ des couples $(p_n, q_n)$ vérifiant $|q_n\alpha - p_n| \leq \frac{1}{q_n}$ et tels que $(|q_n\alpha - p_n|, 1 \leq n \leq L)$ soit strictement décroissante. Prenons $N$ tel que $\frac{1}{N} < |q_L\alpha - p_L|$ et appliquons (3). On peut trouver un couple d'entiers premiers entre eux $(p_{L+1}, q_{L+1})$, vérifiant $|q_{L+1}\alpha - p_{L+1}| \leq \frac{1}{N} \leq |q_L\alpha - p_L|$ et $1 \leq q_{L+1} \leq N$. Ceci prolonge la construction au rang $L + 1$ et on itére. $\square$

Notons que si $\alpha$ est un rationnel, $\alpha = a/b$, $b \geq 1$, l'inégalité (3) entraîne $p/q = a/b$ dès que $N > b$. En effet, si $|a/b - p/q| \leq \frac{1}{qN}$, alors $|aq - bp| \leq \frac{b}{N} < 1$ si $N > b$. Mais comme $|aq - bp|$ est un entier $\geq 0$, ceci implique que cet entier est nul.

**Théorème 2.2.** *Si $\alpha$ est un nombre irrationnel, pour tout intervalle $]a, b[$ dans $[0, 1]$, avec $a < b$, il existe un entier $k$ tel que $\{k\alpha\} \in ]a, b[$.*

*Preuve* : Appliquons le théorème avec $N$ tel que $\frac{1}{N} < b - a$. On sait qu'il existe un entier $q \geq 1$ pour lequel $0 < \{q\alpha\} \leq \frac{1}{N}$. En prenant les multiples successifs de $\{q\alpha\}$, on finit par dépasser $b$ : il existe un entier $r \geq 0$ tel qu $r\{q\alpha\} < b \leq (r + 1)\{q\alpha\}$. Nécessairement, comme la longueur de l'intervalle $]a, b[$ est $> \frac{1}{N}$, on a $r\{q\alpha\} \in ]a, b[$. Mais $r\{q\alpha\} = \{rq\alpha\}$, ce qui montre l'assertion du théorème avec $k = rq$. $\square$

On peut formuler le résultat de ce théorème sous la forme de l'énoncé suivant : *Si $\alpha$ est irrationnel, les multiples de $\alpha$ sont denses modulo 1 sur* $[0, 1]$.

**Application** : A l'aide du théorème, montrer qu'une droite de pente irrationnelle dans le plan partant de l'origine s'approche d'aussi près que l'on veut d'un point du réseau $R$ des points à coordonnées entières.

Montrer que si l'on dispose des obstacles de façon périodique dans chaque carré défini par le réseau (pensez à un jeu de quilles), la droite de pente irrationnelle passe par certains de ces obstacles (on renverse les quilles). Ceci justifie la remarque qu'avait faite Oresme au 14ème siècle sur le mouvement (apparent) des planètes !

*Indications* : Pour préciser, soit $]a, b[$ un petit intervalle de $[0, 1]$ et supposons qu'on ait disposé un obstacle représenté par un petit segment $I_{r,s}(a, b) = (r + a, s), (r + b, s)$ sur chaque segment horizontal $[(r, s),\ (r + 1, s)]$, $r$ et $s$ entiers.

La droite $g$ (figure 3) a une pente irrationnelle $\lambda$. Il est clair que l'inverse $\alpha = \lambda^{-1}$ est également irrationnel. D'après le théorème 2.2, il existe $k$ tel que $\{k\alpha\} \in ]a, b[$. La droite $g$ coupe la droite horizontale d'ordonnée $k$ au point $A_k = (k\alpha, k)$. Ce point est sur le segment $[([k\alpha], k),\ ([k\alpha] + 1, k)]$ et appartient à l'intervalle $I_{[k\alpha],k}(a, b)$. (Faire un dessin.)

## 3. Un exemple de question liée à l'irrationalité

### 3.1. Sur une suite d'entiers.

Nous présentons maintenant une question sur une suite d'entiers où une propriété d'irrationalité intervient.

Considérons la suite :

$$\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 1,\ 3,\ 6,\ 1,\ 2,\ 5,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 1,\ 3,\ ...\}$$

Comment cette suite est-elle engendrée ?

Elle est obtenue en écrivant $2^k$ en base 10 et en retenant pour chaque $k$ le premier digit de cette écriture.

$$2^0 = 1,\ 2^1 = 2,\ 2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32,\ 2^6 = 64,\ 2^7 = 128,\ 2^8 = 256,$$
$$2^9 = 512,\ 2^{10} = 1024,\ 2^{11} = 2048,\ 2^{12} = 4096,\ 2^{13} = 8192,\ 2^{14} = 16384,\ 2^{15} = 32768$$

C'est donc la suite $(x_k)_{k\geq 0}$ définie par :

$$\begin{aligned} &x_k = a \Leftrightarrow 2^k = a.10^\ell + ... \\ &\Leftrightarrow\ \ a\ 10^\ell \leq 2^k < (a+1)\ 10^\ell \ \text{ pour un entier } \ell \geq 0 \text{ et } a \in \{1, 2, ..., 9\}. \end{aligned}$$

Est-ce que le digit "7", ou le digit "9", qui ne figurent pas dans les premiers termes de la suite, finissent par apparaître et, si oui, à quel rang ?

La réponse est 46 pour 7 et 53 pour 9. Dans les 50 premiers termes de la suite, "7" apparaît 1 fois, "9" 0 fois, et "8" 5 fois. Ceci suggère que les "7" et les "9" sont beaucoup plus rares, par exemple, que les "1" ou les "8".

*Problème* : Si l'on veut vérifier que tous les digits apparaissent, il suffit de calculer suffisamment de termes de la suite. Mais on peut se demander si tous les blocs de digits apparaissent comme début de l'écriture de $2^k$ en base 10 (par exemple "34567").

On peut également poser le problème de la fréquence d'apparition des différents symboles.

### 3.2. Apparition (et fréquence) d'un symbole.

**Question** : fréquence d'apparition de $a = 1, 2, ..., 9$ dans la suite

Notons $\alpha = \log_{10} 2$. On a :

$$\begin{aligned} &a\ 10^\ell \leq 2^k < (a+1)10^\ell, \text{ pour } a = 1, ..., 9 \text{ et } \ell \text{ entier}, \\ &\Leftrightarrow \{k\alpha\} \in [\log_{10} a, \log_{10}(a+1)[. \end{aligned}$$

On note que $\log_{10} 2$ est un nombre irrationnel. En effet, dans le cas contraire, il existerait deux nombres $p$ et $q$ premiers entre eux tels que $\log_{10} 2 = p/q$, soit $2^q = 10^p$, ce qui est impossible, car 5 et 2 sont premiers entre eux.

On applique alors le théorème de densité montré précédemment.

Ce même théorème de densité permet de montrer que tous les blocs de digits apparaissent comme début de l'écriture de $2^k$ en base 10. Par exemple le bloc 34567 apparaît : ceci peut être vu comme un énoncé sur les "digits" de la base $10^5$.

Il est clair que ce résultat ne peut pas être obtenu par un simple calcul ! C'est un exemple d'un énoncé élémentaire (qui n'utilise que des entiers), mais dont la preuve nécessite des méthodes non uniquement arithmétique.

Examinons la distribution de la suite $(x_k)$. Pour chaque chiffre $a \in \{1, 2, ..., 9\}$, nous allons chercher à calculer

$$d(a) = \lim_n \frac{1}{n} \text{ Card}\{0 \leq k < n : x_k = a\}.$$

On peut montrer que cette limite existe, ce qui donne la fréquence d'apparition de $a = 1, 2, ..., 9$ dans la suite $(x_k)$. Voici une idée de la preuve.

Posons $f_a(x) = 1_{[\log_{10} a, \log_{10}(a+1)[}(\{x\})$.

La somme $\sum_0^{n-1} f_a(k\alpha)$ compte combien de fois, pour $k = 0, ..., n-1$, l'écriture de $2^k$ en base 10 commence par $a$. Sa moyenne est égale à $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_a(k\alpha)$.

On utilise alors le résultat suivant :

**Théorème 3.1.** *Si $\alpha$ est irrationnel, on a, pour tout intervalle $]a, b[$ de $[0, 1]$ :*

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{[a,b]}(\{x + k\alpha\}) = b - a, \text{ pour tout } x. \tag{5}$$

Ce résultat signifie que, pour $n$ grand, la moyenne est très proche de la longueur de l'intervalle $]a, b[$. On dit que la répartition de la suite $(\{x + k\alpha\}), k \geq 1)$ est (asymptotiquement) *uniforme* dans l'intervalle $[0, 1]$.

*Application* : Revenons à la question sur l'écriture de $2^k$ en base 10. Le nombre $\alpha = \log_{10} 2$ étant irrationnel, en utilisant le résultat précédent, on obtient que, pour $a = 1, ...9$, on a :

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_a(x + k\alpha) = d(a) = \log_{10}(1 + 1/a) = \log_{10}(a + 1) - \log_{10} a.$$

La proportion de digits "$a$", $a = 1, \ldots, 9$, est donc donnée par $\log_{10}(1+1/a)$, ce qui montre en particulier qu'il y a plus de "7" que de "8". On vérifie que $\sum_1^9 d(a) = 1$.

## 4. **Fractions continues**

### 4.1. **Représentation en fractions continues.**

Nous avons vu la représentation par développement décimal. Une autre représentation des nombres réels est fournie par leur développement en fraction continue. Cette représentation donne une information précise sur l'approximation par des rationnels.

**Algorithme de fraction continue**

Notons $a$ et $T$ les fonctions $a(x) = [\frac{1}{x}]$ et $\frac{T(x)=\{1}{x\}}$ définies sur $]0, +\infty[$.

Rappelons que [] et {} désignent la partie entière et la partie fractionnaire.

Soit $x \in ]0, 1[$. Par définition de $a$ et de $T$, on a : $\frac{1}{x} = a(x) + T(x)$, soit :

$$x = \frac{1}{a(x) + T(x)}. \tag{6}$$

Appliquée à $T(x)$, la relation (6) donne :

$$T(x) = \frac{1}{a(T(x)) + T(T(x))}.$$

En remplaçant dans (6) $T(x)$ par son expression ci-dessus à droite, on obtient :

$$x = \frac{1}{a(x) + \frac{1}{a(T(x))+T(T(x))}}.$$

On peut alors réitérer cette construction et définir par récurrence deux suites (dépendant de $x$) $(a_n)$ à valeurs entières et $(x_n)$ dans $[0, 1]$ en posant :

$x_0 = x$, et pour $n \geq 1$ : $x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x)$, $a_n = [\frac{1}{x_{n-1}}] = a(T^{n-1}(x))$.

On obtient

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \cdots + \frac{1}{a_n + x_n}}}.$$

Si $x = b/a$ est rationnel, cette construction correspond à l'algorithme de calcul du pgcd, et elle s'arrête à la valeur de $n$ pour laquelle $T^n(x) = 0$.

Pour $a, b$ entiers $\geq 1$, $a \geq b$, à la première étape on écrit $a = bq + r$, avec $0 \leq r < b$, puis :

$$x = \frac{b}{a} = \frac{1}{q + \frac{r}{b}}.$$

On continue jusquà ce que l'on trouve 0 comme reste. Par exemple pour $x = 4/11$, nous avons $4/11 = \frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}$.

**Développement en fraction continue**

Si $x$ est irrationnel, la construction se poursuit indéfiniment. Dans la suite, nous nous placerons dans ce cas. On obtient donc une suite d'entiers $\geq 1$ : $(a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ et la formule appelée développement en fraction continue de $x$ :

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}}. \tag{7}$$

Prenons l'exemple de $a = \sqrt{2} - 1$, qui est compris entre 0 et 1.

Le nombre $a$ est la racine positive de l'équation du second degré : $x^2 + 2x - 1 = 0$, dont les racines sont : $\sqrt{2} - 1$ et $-(1 + \sqrt{2})$.

L'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$ peut s'écrire : $x = \frac{1}{2+x}$. On a donc :

$$a = \frac{1}{2+a} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2+a}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2+a}}} = \dots = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots + \frac{1}{2 + \dots}}}.$$

Cette représentation du nombre $a$ comme limite de fractions successives est le développement en fraction continue de $a = \sqrt{2} - 1$.

Le développement de $\sqrt{2}$ en fraction continue est donc :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots + \frac{1}{2 + \dots}}}.$$

**Application à l'approximation par les rationnels**

Si dans la formule (7), nous nous arrêtons à l'étape $n$, nous obtenons une fraction qui est le quotient de deux entiers $p_n$ et $q_n$ :

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}.$$

On montre que la fraction est irréductible ($p_n$ et $q_n$ premiers entre eux) ainsi que les résultats suivants que nous admettrons ici :

Posons $p_{-1} = 1$, $p_0 = 0$, $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$.

Les suites $(p_n)$ et $(q_n)$ vérifient les relations de récurrence suivantes, pour $n \geq 0$ :

$p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}$, $q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$.

D'autre part, si $x$ est donné par son développement (7), on a l'inégalité

$$|x - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}. \tag{8}$$

Cette inégalité montre en particulier la convergence de la suite $(p_n/q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $x$, ce qui justifie l'écriture de $x$ sous la forme de son "développement" en fraction continue (qui s'arrête si $x$ est rationnel) donné par (7).

Inversement, pour toute suite $(a_n)$ d'entiers $\geq 1$, le développement converge vers un réel $x$. On obtient ainsi une bijection entre $[0, 1] - (\mathbb{Q} \cap [0, 1])$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

### 4.2. **Nombre d'or.**

L'un des nombres irrationnels les plus célèbres dans le domaine de l'art est le nombre d'or.

Le nombre d'or est $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le début de son développement décimal est $1,6180339887$.

C'est la solution positive de l'équation du second degré :

$$x^2 - x - 1 = 0, \text{ dont les racines sont : } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Le nombre $c = b - 1$ est solution de $y^2 + y - 1 = 0$, soit $y(1+y) = 1$, ou encore $y = \frac{1}{1+y}$. En utilisant l'équation dont $c$ est solution sous cette forme, on peut écrire :

$$c = \frac{1}{1+c} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+c}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+c}}}.$$

Finalement on obtient la représentation du nombre d'or sous la forme de son développement en fraction continue :

$$b = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots + \frac{1}{1+\dots}}}. \tag{9}$$

**Démonstration de l'irrationalité du nombre d'or :**

1) Par un argument arithmétique.

Supposons que le nombre d'or $b$ soit rationnel. On a donc $b = p/q$, où $p, q$ sont deux entiers, avec $0 < q, p$. d'après l'équation vérifiée par le nombre d'or, $p$ et $q$ satisfont la relation :

$$p^2 - pq - q^2 = 0, \text{ soit } p(p-q) = q^2.$$

Donc $p$ divise $q$, contrairement au fait qu'ils sont premiers entre eux.

2) En utilisant son développement en fraction continue.

Si le nombre d'or était un nombre rationnel, son développement en fraction continue se terminerait après un nombre fini d'itérations, contrairement à ce que montre la formule (9). (Attention aux petits points ..., qui montrent que le développement ne s'arrête pas !)

De même, on obtient une troisième démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ en utilisant son développement en fraction continue

**La suite de Fibonacci** :

Elle est définie par la relation de récurrence :

(10) $$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, n \geq 0$$

et les conditions initiales : $p_0 = 0, p_1 = 1$.

Les premiers termes de la suite sont donc

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...\}.$$

La suite de Fibonacci est reliée au nombre d'or et nous allons chercher en exercice une "formule" permettant d'exprimer la suite $(f_n, n \geq 1)$

1) Ecrire une équation (E) d'inconnue $\lambda$ telle que $(\lambda^n, n \geq 1)$ vérifie (10).

2) Calculer les racines $\lambda_1$ et $\lambda_2$ de l'équation (E).

On obtient deux valeurs distinctes $\lambda_1$ et $\lambda_2$ telles que les suites $(\lambda_1^n, n \geq 1)$ et $(\lambda_2^n, n \geq 1)$ vérifient (10).

3) Exprimer le terme $f_n$ de la suite de Fibonacci sous la forme :

$$f_n = r\lambda_1^n + s\lambda_2^n,$$

où $r, s$ sont deux constantes.

*Solution* :

1) Pour que $(\lambda^n, n \geq 1)$ vérifie (10) il faut et il suffit que $\lambda^{n+1} - \lambda^n - \lambda^{n-1} = 0$, pour tout $n \geq 0$ ; soit $(\lambda^2 - \lambda - 1)\lambda^{n-1} = 0$.

L'équation (E) est donc $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

2) Ses solutions sont $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or) et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

3) Déterminons $r$ et $s$ tels que, pour $n = 0$ et $n = 1$, $r\lambda_1^n + s\lambda_2^n = p_n$. On doit avoir :

$$\begin{aligned} r + s &= 0, \\ r\lambda_1 + s\lambda_2 &= 1. \end{aligned}$$

D'où $r = \frac{1}{\sqrt{5}}, s = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

La suite $(\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n, n \geq 0)$ et la suite $(f_n, n \geq 0)$ sont déterminées par la relation (10) et les mêmes conditions initiales pour $n = 0$ et $n = 1$. Donc ces deux suites coïncident.

On a donc montré que

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n, \text{ pour tout } n \geq 0.$$

$\square$