Introduction à la géométrie non Euclidienne

Marie Trin (avec l'aide de Yann Millot)

14 Janvier 2023

Quand on pense géométrie on pense généralement à la géométrie Euclidienne, dans le plan, avec ses droites, ses parallèles et la notion de longueur. On verra que la géométrie Euclidienne n'est en fait qu'une géométrie parmi tant d'autres. Le but de cet atelier sera de se plonger dans des mondes à la géométrie non Euclidienne

1 Les postulats d'Euclide

La géométrie Euclidienne (géométrie classique) repose sur les 5 postulats d'Euclide :

1. Par toute paire de points passe une unique droite,
2. Tout segment peut être prolongé en une droite,
3. Tout segment est le rayon d'un cercle,
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux,
5. Etant donnés un point et une droite, il existe une unique droite passant par le point et parallèle à la droite.

Définition Un angle est l'inclinaison mutuelle entre deux droites distinctes qui se croisent.

Définition Un angle est dit droit s'il est issu de l'intersection de deux droites et que l'angle adjacent issu de cette intersection lui est égal.

Définition Deux droites sont parallèles si elles ne se rencontrent jamais.

Remarque Le postulat numéro 5 est donné ici dans sa version moderne. La version d'Euclide étant : *"Si une droite rencontre deux droites en faisant des angles intérieurs du même côté de la sécante ayant une somme inférieure à deux angles droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où se trouvent les angles dont la somme est inférieure à deux angles droits"* On peut montrer l'équivalence de ces deux versions grâce aux propriétés 17 et 27 d'Euclide (numérotation issu du livre "Les éléments") ci-dessous. On donne deux propositions supplémentaires dont nous aurons besoin plus tard. Notons que les trois propositions ci-dessous se prouvent en utilisant seulement les 4 premiers axiomes (il est donc légitime de les utiliser pour montrer l'équivalence entre les deux versions du cinquième).

Proposition 4. Deux triangles ayant deux côtés et l'angle entre eux égaux sont égaux.

Proposition 17. Dans un triangle, la somme de deux angles quels qu'ils soient est inférieure (strictement) à π.

Proposition 26. Si deux triangles ont deux angles ainsi qu'un côté égaux, alors ils sont égaux.

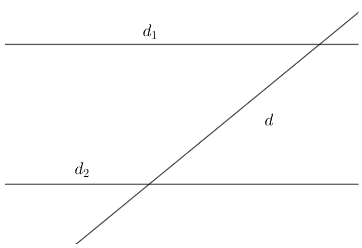
Proposition 27. Si deux droites coupées par une troisième forment des angles alternes-internes égaux alors elles sont parallèles.

On parle de géométrie quand on étudie les figures d'un certain espace. On s'intéressera ici aux figures "plates" (droites, segment, courbes, polygones ...) et plus particulièrement aux droites parallèles et aux triangles. Dans ce cadre la géométrie Euclidienne est l'étude des figure du plan dans lequel les cinq axiomes ci-dessus sont vérifiés : le plan Euclidien ($\mathbb{R}^2$).

1.1 Triangles et parallèles en géométries euclidienne

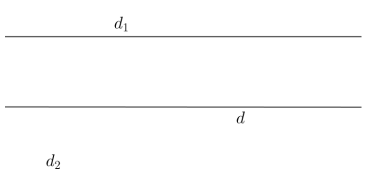
Propriétés sur les parallèles (conséquences de 5.)

a) Si d_1 et d_2 sont parallèles et que d (distincte de d_1 et d_2) coupe l'une, alors elle coupe aussi l'autre.



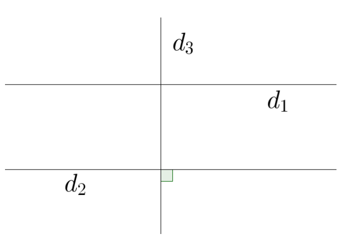
Preuve : Supposons que d coupe d_1, disons en un point A. Par l'absurde, si d ne coupe pas d_2 alors elle est parrallèle à d_2 passant par A, or d'après le 5° postulat une telle parallèle est unique et donc $d = d_1$. Or, on a supposé $d \neq d_1$: il y a une contradiction. On en déduit donc que d coupe d_2.

b) Si d_1 et d_2 sont parallèles à d alors elles sont parallèles entre elles.



Preuve : Si d_1 et d_2 se coupent alors d'après la propriété précédente elles coupent aussi d, ce qui n'est pas possible puisqu'elles sont parallèles à d. Ainsi, on en conclut que d_1 et d_2 ne se coupent pas : elles sont parallèles.

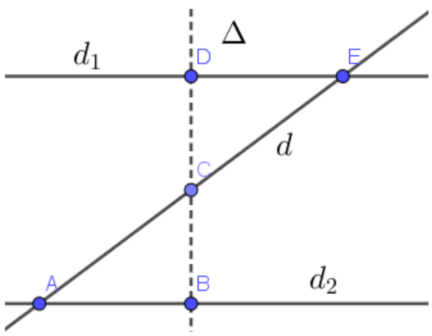
c) Si d_1 et d_2 sont parallèles et que d_3 est perpendiculaire à d_2, alors d_3 est perpendiculaire à d_1.



Preuve : d_3 coupe d_2 donc a) assure que d_3 coupe d_1, disons en un point A. Soit maintenant Δ la perpendiculaire à d_3 en A. Les droites Δ et d_2 sont coupées par d_3 et les angles alternes-internes sont égaux (4° postulat). Par la *proposition 27* d'Euclide, Δ est parallèle à d_2, de plus elle passe par A, donc d'après le 5° postulat $d_1 = \Delta$, et d_1 est bien perpendiculaire à d_3.

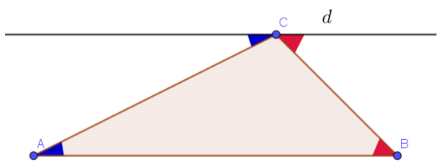
Propriétés sur les triangles

d) Propriétés des angles alternes-internes, alternes-externes et correspondants.



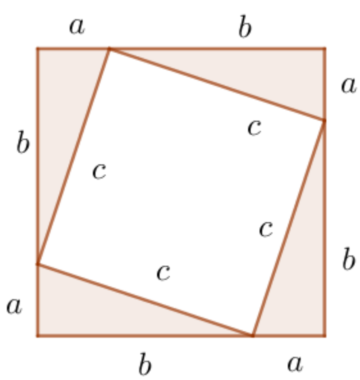
Preuve : Montrons que pour d_1 et $d2$ parallèles coupées par d, les angles alternes internes sont égaux. On prend les notations ci-contre. Le point C est le milieu du segment AE puis Δ est la perpendiculaire à d_2 passant par C, elle est aussi perpendiculaire à d_1 par c). Les triangles EDC et ABC ont deux angles égaux : en C par définition d'un angle, en B et D par le postulat 4 ; et une longueur égale (l'hypoténuse, par construction de Δ), ils sont donc égaux. Ainsi $\widehat{DEC} = \widehat{BAC}$: les angles alternes-internes sont égaux. (Les égalités des angles alternes externes et correspondants suivent.)

e) La somme des angles d'un triangle vaut $\boxed{\mathcal{S}{=}\pi \text{ radians} = 180\ ^\circ}$.



Preuve : Soit ABC notre triangle, traçons d la parallèle au côté AB passant par C. La propriété d) assure que l'angle entre BC et d est égal à $\widehat{CBA}$, et que celui entre AC et d est égal à $\widehat{CAB}$. Ainsi, la somme des angles du triangle est un angle plat, soit 180° ou π radians.

f) Théorème de Pythagore.



Preuve : Soit a, b et c les longueurs des côtés de notre triangle, c étant la longueur de l'hypoténuse. On trace un carré de côtés $a+b$ et on trace, comme ci-contre, à l'intérieur des triangles rectangles dont les côtés entourant l'angle droit sont de longueurs a et b. La *Propriété 4* d'Euclide assure que l'on a tracé 4 fois notre triangle de départ et avec e) on montre que le quadrilatère de côtés c à l'intérieur de notre carré est lui aussi un carré. En calculant l'aire $\mathcal{A}$ du grand carré de deux manières on a :

$$\mathcal{A} = (a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}.$$

En simplifiant on obtient $a^2 + b^2 = c^2$.

Remarque On a utilisé, directement ou indirectement, le cinquième postulat dans la preuve de chacune de ces propriétés.

Dans le reste de la scéance, on pensera à regarder si de telles propriétées restent vraies dans les autres géométries visitées.

1.2 Modification du cinquième postulat

Le but de cette scéance est de découvrir deux nouvelles géométries dans lesquelles le postulat 5. est modifié. On en verra deux versions :

5.1) Etant donnés un point et une droite, il n'existe aucune parallèle à cette droite passant par ce point.

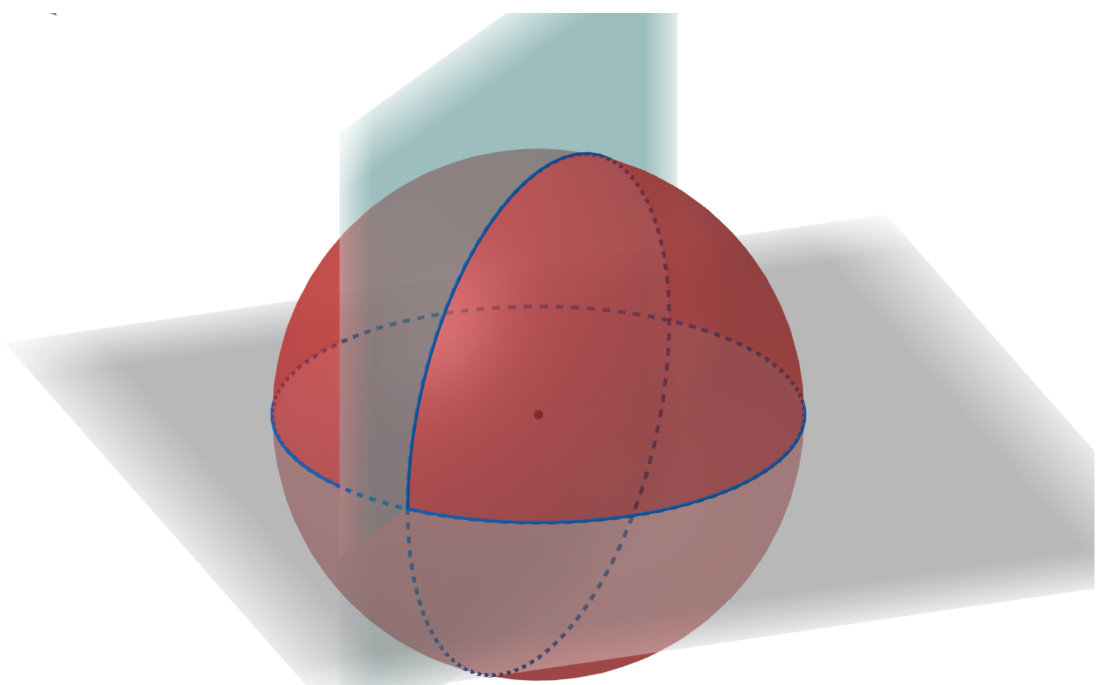
5.2) Etant donnés un point et une droite il existe une infinité de parallèles à la droite passant par ce point.

Pour décrire une géométrie on donnera l'espace considéré et les *géodésiques* de cette géométrie. Les géodésiques d'une géométrie sont l'équivalent des droites de la géométrie Euclidienne. Si l'on s'intéresse à la définition de longueur des courbes dans notre espace alors un *segment géodésique* est le chemin le plus court entre ses extrémités et une *géodésique* est une courbe infinie qui est localement le chemin le plus court entre deux de ses points, un segment géodésique est donc une portion de géodésique (les droites et les segments correspondent bien à cette définition si on se place dans $\mathbb{R}^2$).

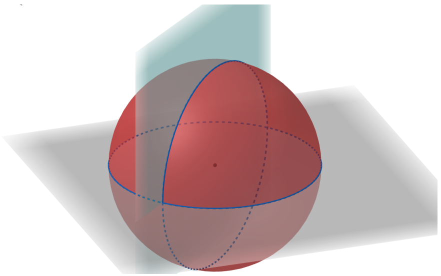
2 Géométrie sphérique

L'espace : La sphère $\mathbb{S}^2$
Les géodésiques : Les grands cercles de la sphère

Remarque Les grands cercles de la sphère sont construits par intersection de la sphère avec les plans de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine.



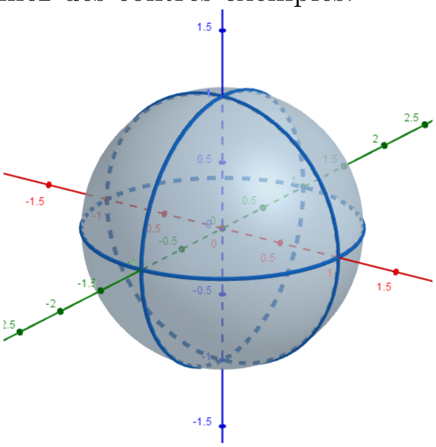
Propriété des parallèles Il n'y a pas de géodésiques parallèles : deux géodésiques distinctes ont toujours deux points d'intersection.



Preuve : Si g_1 est la géodésique définie par le plan P_1 et g_2 celle définie par le plan P_2 alors leurs points d'intersection sont les points d'intersection entre P_1, P_2 et la sphère : $P_1 \cap P_2 \cap \mathbb{S}^2 = (P_1 \cap P_2) \cap \mathbb{S}^2$. Or deux plans (distincts) passant par l'origine se coupent en une droite passant par l'origine, puis une droite passant par l'origine rencontre la sphère en exactement 2 points : on a donc exactement deux points d'intersection entre g_1 et g_2.

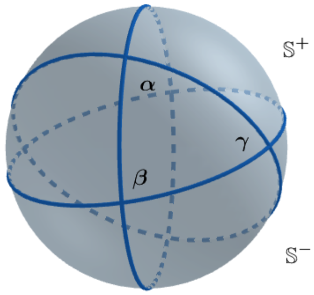
Remarque Dans le cas de la géométrie sphérique, le troisième postulat d'Euclide n'est pas vérifié. Une géométrie dans laquelle les quatre premiers postulats sont vérifiés est appelée *géométrie absolue*.

Exercice Que pouvez-vous dire concernant les propriétés des triangles. Si vous les pensez fausses donnez des contres exemples.



Notons que les parallèles n'existant pas, la propriété d) ne peut pas être vérifiée.
Le triangle défini par l'équateur et deux méridiens orthogonaux est un triangle avec trois angles droits et tous les côtés de la même longueur, le théorème de Pythagore est donc faux et la somme des angles d'un triangle peut être supérieure strictement à π.

Théorème La somme des angles d'un triangle est toujours *strictement supérieure* à π. En particulier, l'aire d'un triangle dont les angles aux sommets valent α, β et γ vaut $\boxed{\mathcal{A}=\alpha+\beta+\gamma-\pi}$.



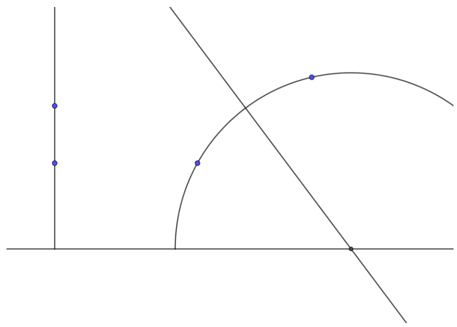
Preuve : On notera que l'aire d'une demi-région comprise entre deux géodésiques formant un angle θ vaut 2θ. (ici on appelera une telle zone un fuseau)
Soit T notre triangle d'angles α, β et γ. Considérons l'une des géodésique définissant ce triangle, elle coupe notre sphére en deux hémisphères d'aire 2π. Calculons de manière alternative (avec les notations ci-contre) l'aire de l'hémisphère nord $\mathbb{S}^+$.

On peut recouvrir $\mathbb{S}^+$ avec : un fuseau d'angle β, plus un fuseau d'angle γ auquel on enlève une copie de T, plus un fuseau d'angle α auquel on enlève aussi une copie de T (celui à "l'arrière" de notre sphère). On a alors recouvert $\mathbb{S}^+$ exactement une fois donc $2\pi = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2\mathcal{A}(T)$. On en déduit donc que l'aire vaut $\alpha+\beta+\gamma-\pi$, et une aire étant strictement positive : $\alpha+\beta+\gamma > \pi$.

3 Géométrie hyperbolique

L'espace : Le demi plan supérieur $\mathbb{H}^2$
Les géodésiques : Les demi-cercles centrés sur l'axe des abscisses ou les demi-droites verticales

Exercice Se convaincre que par deux points (distincts) passe une unique géodésique.



Si les deux points ont la même abscisse, la géodésique sera la demi droite verticale le long de cette abscisse.
Sinon, le centre de la géodésique doit être sur la médiatrice entre nos deux points, or cette médiatrice a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, il y a donc une possibilité et une unique pour la géodésique entre les deux points..

Remarque La géométrie hyperbolique est une *géométrie absolue*.

3.1 Visualisation de l'espace

On peut aussi voir $\mathbb{H}^2$ comme étant le disque de centre 0 et de rayon 1, les géodésiques sont alors les diamètres ou les arcs de cercles coupant orthogonalement le bord.

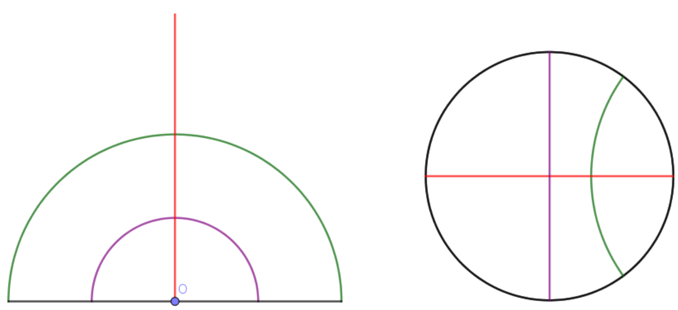


Figure 1: Deux représentations du plan hyperbolique

Attention Dans la version demi plan, la droite des réelles NE FAIT PAS PARTIE du plan hyperbolique, et donc dans la représentation par le disque, c'est le cercle qui ne fait pas partie de l'espace.

Important La manière de mesurer les longueurs dans cet espace n'est pas celle que l'on utilise habituellemnt dans le plan (et c'est normal puisque l'on veut que nos géodésiques soient les chemins les plus courts !). Pour se donner une idée, la manière de définir les longueurs et les volumes dans cet espace donne un effet de perspective (comme quand on regarde au loin quelque-chose de grand mais qu'il nous apparaît petit).

Par exemple dans la gravure ci-dessous, tous les anges ont la même taille et de même pour les démons.

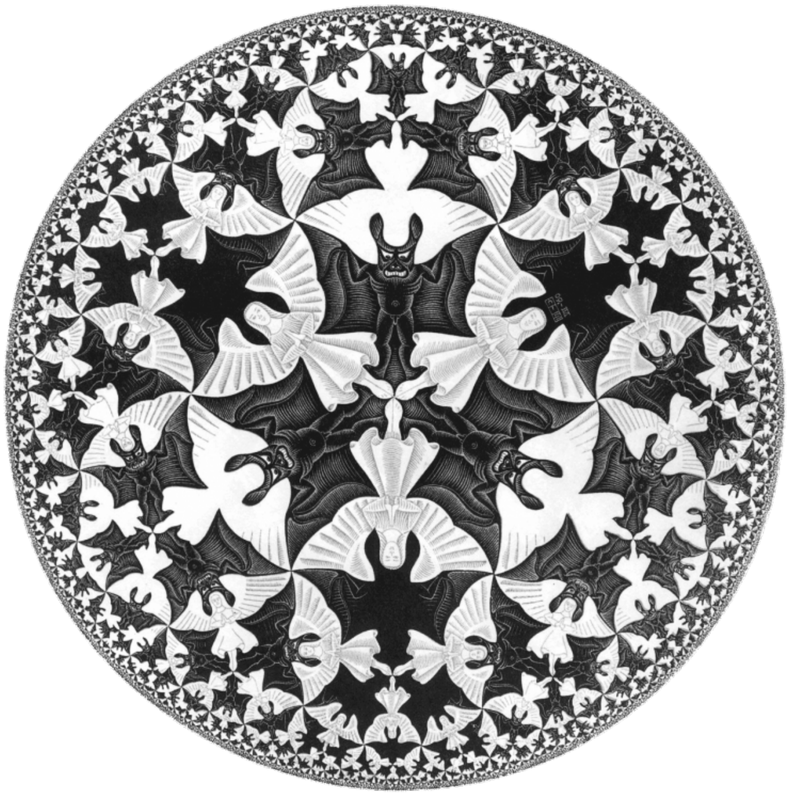
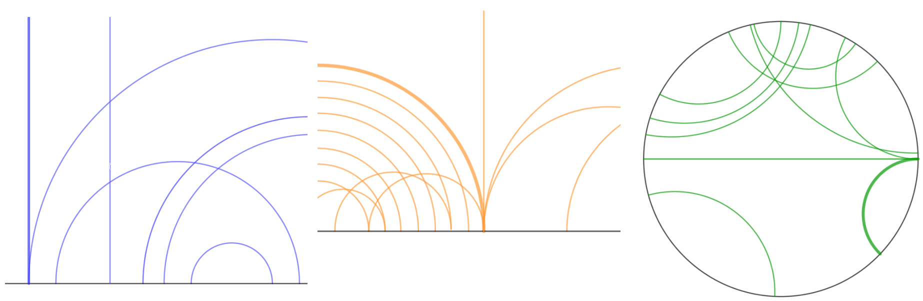


Figure 2: Gravure de Escher

3.2 Les parallèles

Commençons par dessiner, dans les deux modèles, des familles de géodésiques parallèles.

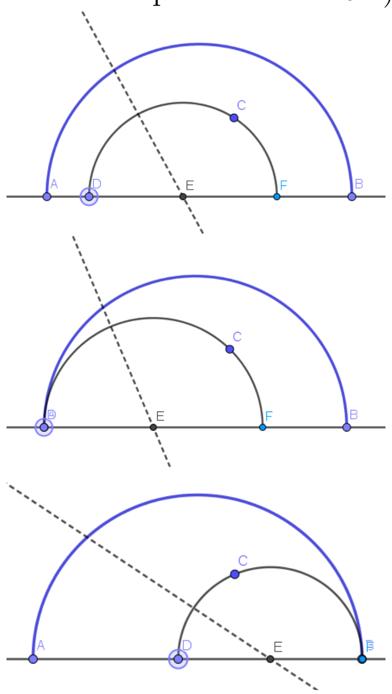
Sur chaque dessin, chaque géodésique est parallèle à celle en gras.



Les géodésiques qui sont tangentes au bord sont bien parallèles puisque ces bords ne font pas partie des espaces que l'on considère.

Propriété des parallèles Si d_1 et d_2 sont parallèles, il existe des parallèles à d_1 qui ne sont pas parallèles à d_2.

Exercice Prouver que la version 5.2) du 5^{eme} postulat d'Euclide est bien correcte dans ce cadre.

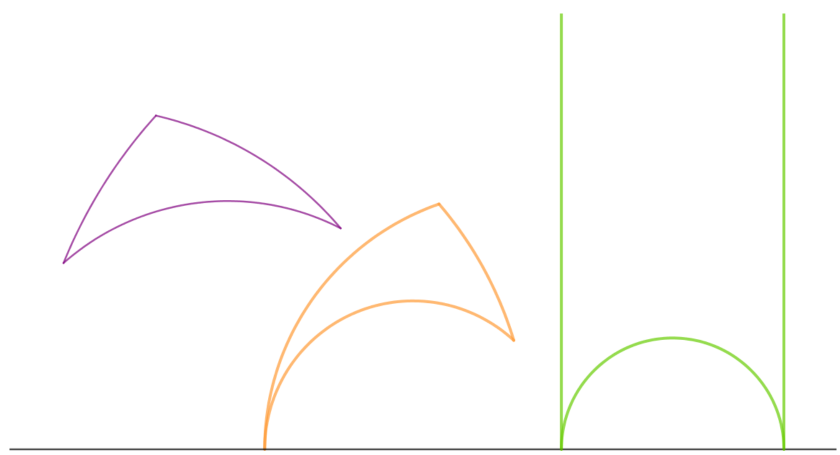


On fait la preuve pour une géodésique g_1 en forme d'arc de cercle, notons A et B ses extrémités (ce sont deux réels). On fixe un point C de $\mathbb{H}^2$, avec la même construction que précédemment, pour chaque point D de la droite réelle on a une unique géodésique g basée en D passant par C.

Lorsque $D = A$, g est parallèle à g_1, on peut ensuite faire bouger D jusqu'à une valeur D_1 pour laquelle l'autre extrémité de g coïncide avec F : pour chaque valeur de D entre A et D_1, soit une infinité de valeur, g est une géodésique parallèle à g_1 passant par C.

3.3 Les triangles

Commençons par tracer des exemples de triangles :



On peut considérer des triangles dont les sommets sont 'à l'infini', on les appelle *triangles idéaux* lorsque c'est le cas des trois sommets.

Théorème La somme des angles d'un triangle est toujours *strictement inférieure* à π. En particulier, l'aire d'un triangle d'angles aux sommets α, β et γ vaut $\boxed{\mathcal{A} = \pi - \alpha + \beta + \gamma}$ L'aire d'un triangle idéal est donc égale à π.