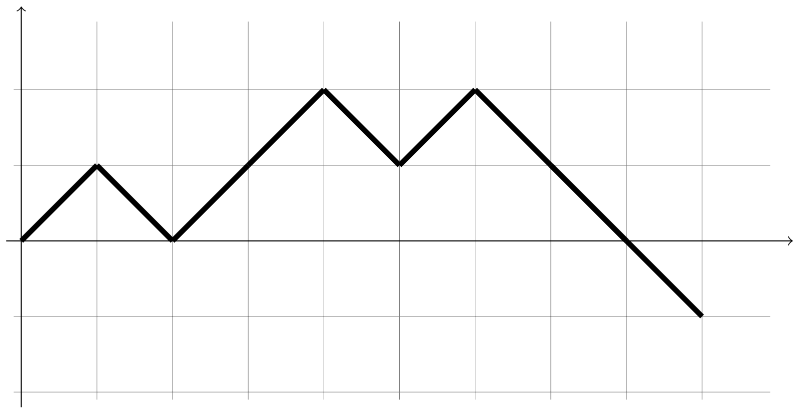
Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$

Lisa Balsollier et Emilien Manent

Une ligne brisée de ce type est appelée *marche aléatoire sur* $\mathbb{Z}$.

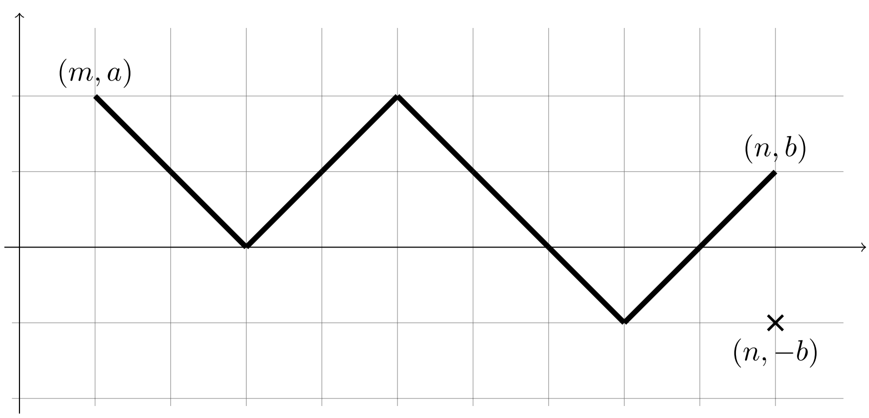


Pour $n \geq 1$, on note S_n la valeur de la marche aléatoire après le n-ième lancer. Par exemple, ici $S_3 = 1$, $S_9 = -1$.

I Chemins possibles pour la marche aléatoire

1. On suppose que $S_0 = 0$.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par S_n ?
   (b) Exprimer le nombre de montées M_n obtenus lors des n premiers pas en fonction de n et S_n.
2. Combien existe-t-il de lignes brisées de taille n ?
3. Soient (m, a) et (n, b) deux couples d'entiers avec $n > m$. On cherche à calculer le nombre de chemins possibles de (m, a) vers (n, b).
   (a) Démontrer que si $n - m$ et $b - a$ n'ont pas la même parité alors il n'existe pas de chemin de (m, a) vers (n, b).
   (b) Démontrer que si $|b - a| > n - m$ alors il n'existe pas de chemin de (m, a) vers (n, b).
   (c) On suppose que $n - m$ et $b - a$ ont la même parité et que $|b - a| \leq n - m$. Montrer qu'un chemin de (m, a) vers (n, b) contient exactement $\dfrac{m-n}{2} + \dfrac{b-a}{2}$ montées.
   (d) On suppose toujours que $n - m$ et $b - a$ ont la même parité et que $|b - a| \leq n - m$. Exprimer le nombre de chemins possibles de (m, a) vers (n, b) à l'aide d'un coefficient binomial. *Se rapporter à l'encadré "Coefficient binomial" dans l'Annexe.*

II Le principe de réflexion. Application au théorème du scrutin.



1. Soient a et b des entiers strictement positifs. Montrer que le nombre de chemins de (m, a) vers (n, b) passant par zéro est égal au nombre de chemins de (m, a) vers $(n, -b)$.
2. À l'issue d'une élection opposant deux candidats A et B, le candidat A obtient 600 voix et le candidat B obtient 400 voix.
   (a) Modéliser ce dépouillement avec une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.
   (b) Exprimer le nombre total de dépouillements possibles aboutissant à cet issue.
   (c) Calculer le nombre de dépouillements possibles durant lesquels le candidat A reste en tête (au sens strict) tout le long du dépouillement.
   (d) En déduire la probabilité que A reste en tête (au sens strict) tout le long du dépouillement.
   (e) En s'inspirant des questions précédentes, calculer la probabilité que A reste en tête (au sens large) tout le long du dépouillement.

III Retours en zéro

On suppose que $S_0 = 0$. Pour n et r deux entiers on note $N_{(n,r)}$ le nombre de chemins de taille n vérifiant $S_n = r$.

1. Comparer la parité de S_n et de n. Qu'est-ce que cela signifie sur les retours en 0 ?
2. (a) Soit $r \geq 1$. Calculer le nombre de chemins vérifiant $\{S_2 > 0,\ S_4 > 0, ...,\ S_{2n-2} > 0,\ S_{2n} = 2r\}$.
   (b) En déduire que le nombre de chemins vérifiant $\{S_2 > 0,\ S_4 > 0,\ ...,\ S_{2n-2} > 0,\ S_{2n} > 0\}$ vaut $N_{(2n-1,1)}$.
   (c) Démontrer que $N_{(2n,0)} = 2 \times N_{(2n-1,1)}$. En déduire $\mathbb{P}(\{S_{2n} = 0\}) = \mathbb{P}(\{S_{2n-1} = 1\})$.
   (d) Déduire des questions précédentes l'égalité : $\mathbb{P}(\{S_2 \neq 0, S_4 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0\}) = \mathbb{P}(\{S_{2n=0}\})$.
3. On considère un chemin de taille $2n$. On suppose que le dernier passage en zéro de la marche aléatoire sur la période $0 \to 2n$ se fait en $2k$ avec k entre 0 et n.
   (a) Montrer que le nombre de chemins de taille $2n$ dont le dernier passage en zéro a lieu en $2k$ vaut $N_{(2k,0)} \times N_{(2n-2k,0)}$.
   (b) En déduire que la probabilité que le dernier passage en zéro a lieu en $2k$ vaut $\mathbb{P}(S_{2k} = 0) \times \mathbb{P}(S_{2n-2k} = 0)$.

IV Annexe

Coefficient binomial. *Pour deux entiers positifs i et j avec $j \leq i$, on définit le* coefficient binomial $\binom{i}{j}$ *comme le nombre de façons de former des mains de j cartes en piochant dans un jeu de i cartes. On a la formule suivante :*

$$\binom{i}{j} = \frac{(j+1) \times (j+2) \times ... \times (i-1) \times i}{2 \times 3 \times ... \times (i-j-1) \times (i-j)}.$$

Rappel (Équiprobabilité) *On a une situation d'équiprobabilité quand toutes les issues d'une expérience aléatoire ont la même probabilité. En cas d'équiprobabilité des issues dans l'univers Ω, la probabilité d'un événement A se calcule simplement au moyen de la formule :*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'éléments dans } A}{\text{nombre total d'éléments de } \Omega}$$