Densité, complétude et nombre p-adique

Marc Abboud

1 Topologie sur R

Définition 1.1. Une partie A de $\mathbf{R}$ est *dense* si tout $x \in \mathbf{R}$ peut être approché aussi près que l'on veut par un élément de A. C'est à dire pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que

$$a \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\tag{1}$$

Exercice 1. Montrer qu'une partie A de $\mathbf{R}$ est dense si et seulement si pour tout $a, b \in \mathbf{R}$, $A \cap]a, b[\neq \emptyset$.

Définition 1.2. On définit la valeur absolue sur $\mathbf{R}$ ainsi : $|x| = \max(x, -x)$.

Remarque 1.3. C'est la valeur absolue que vous connaissez, elle mesure la distance entre 2 points de $\mathbf{R}$ (faire un dessin).

Définition 1.4.
— Une suite réelle est une fonction $u : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, on notera $u_n := u(n)$.
— Une suite *converge* vers un réel l si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N, |u_n - l| < \varepsilon$.

Exercice 2. Montrer que la suite $(1/n)$ tend vers 0.

Exercice 3. Montrer que la suite $(-1)^n$ n'a pas de limite.

Exercice 4. Si $0 < \lambda < 1$, alors λ^N converge vers 0.

Exercice 5. Montrer que $\mathbf{R}$ privé d'un point est dense dans $\mathbf{R}$. Montrer que $\mathbf{R}$ privé d'un nombre fini de points est dense dans $\mathbf{R}$. En fait $\mathbf{R}$ privé d'un nombre dénombrable de points est dense dans $\mathbf{R}$.

Exercice 6. Montrer qu'une partie A de $\mathbf{R}$ est dense dans $\mathbf{R}$ si et seulement si tout élément de $\mathbf{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A.

Théorème 1.5. $\mathbf{Q}$ *est dense dans* $\mathbf{R}$.

Remarque 1.6. C'est un résultat assez surprenant car on sait que $\mathbf{Q}$ est dénombrable alors que $\mathbf{R}$ non. C'est à dire que $\mathbf{R}$ est infiniment plus grand que $\mathbf{Q}$ mais il permet de l'approcher de manière aussi précise que l'on veut.

Exercice 7 (Preuve du théorème.)**.**
1. Par l'exercice 1, il suffit de montrer que tout segment non vide $]a, b[$ contient un rationnel. On suppose $0 < a < b$. Montrer qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $\frac{1}{n} < b - a$.
2. (Faire un dessin) Montrer que l'ensemble $\left\{ \frac{k}{n} \mid k > 0 \right\}$ intersecte $]a, b[$.
3. Conclure.

Exercice 8 (Autre preuve)**.** Soit $x \in \mathbf{R}$, on définit la partie entière de x ainsi, $E(x)$ est le plus grand entier plus petit que x c'est à dire l'unique entier k tel que $k \leq x < k + 1$.

Montrer que la suite $u_n = \frac{E(10^n x)}{10^n}$ converge vers x.

Définition 1.7. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on dit que f est *continue* en $x \in \mathbf{R}$ si pour toute suite (x_n) qui converge vers x, $f(x_n)$ converge vers $f(x)$. On dit que f est continue si elle est continue en chaque point de son domaine de définition.

Exercice 9. Montrer que $1_{\mathbf{Q}}$ (indicatrice de $\mathbf{Q}$) n'est continue en aucun point.

2 Complétude

2.1 Définition

On aimerait pouvoir montrer qu'une suite est convergente sans pour autant avoir à trouve sa limite. On a ce résultat que les terminales connaissent.

Proposition 2.1. *Toute suite réelle majorée croissante est convergente.*

Mais c'est à peu près tout. Il existe en réalité une autre notion qui est l'outil principal pour montrer qu'une suite est convergente sans avoir à trouver sa limite.

Définition 2.2 (Suite de Cauchy)**.** Soit u une suite réelle, on dit que u est de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N > 0$ tel que pour tout $n, m > N, |u_n - u_m| < \varepsilon$.

Remarque 2.3. Faire un dessin pour bien comprendre la définition.

Exercice 10. Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.

Théorème 2.4. *Toute suite de Cauchy est une suite convergente. On dit que* $\mathbf{R}$ *est un espace complet.*

2.2 Sur un espace métrique quelconque

Définition 2.5. Soit X un espace. Une distance sur X est une application $d : X \times X \to \mathbf{R}_+$ telle que
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$.
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Un espace munie d'une distance est appelé un espace métrique.

Exercice 11. Montrer que la valeur absolue sur $\mathbf{R}$ est une distance.

Définition 2.6. Soit X un espace métrique. Une suite u de X converge vers un élément $l \in X$ si la suite rélle $d(u_n, l)$ converge vers 0.

Exercice 12. Soit X un ensemble, on considère sur X la distance suivante : $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ et $d(x, y) = 1$ sinon. Montrer que c'est une distance.

Caractériser les suites convergentes pour cette distance.

Définition 2.7. Soit X un espace métrique et u une suite de X. u est de cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n, m > N, d(u_n, u_m) < \varepsilon$.

On dit que X est un espace complet si les suites de Cauchy sont convergentes.

Exercice 13. Montrer que $\mathbf{Q}$ n'est pas complet.

Exercice 14. Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $f : X \to X$ une fonction contractante : il existe $0 < \lambda < 1$ tel que pour tout $x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y). \tag{2}$$

On voit que f contracte les distances. On souhaite montrer le résultat suivant : f possède un unique point fixe x_0.

1. Montrer que f ne peut pas avoir 2 points fixes.
2. Montrer que pour tout $N \geq 1$, pour tout $x \in X$,

$$d(f^N(x), x) \leq \frac{1}{1 - \lambda} d(f(x), x) \tag{3}$$

   (Indice : la somme $1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots$ est plus petite que $\frac{1}{1-\lambda}$).

3. Montrer que pour tout $N, M \geq 1$, pour tout $x \in X$,

$$d(f^{N+M}(x), f^N(x)) \leq \frac{\lambda^N}{1-\lambda} d(f(x), x) \tag{4}$$

4. En déduire que la suite $(f^N(x))$ est de Cauchy et conclure.

Théorème 2.8. *Pour tout espace métrique X, il existe un unique espace métrique complet Y contenant X tel que X est dense dans Y. C'est le complété de X.*

Exercice 15 (Preuve)**.** On fera seulement la preuve pour $X = \mathbf{Q}$ et on va en fait construire $\mathbf{R}$. On pose $\mathbf{R}$ comme l'ensemble des suites de Cauchy rationnelles modulo la relation d'équivalence $u \simeq v \Leftrightarrow u - v$ tend vers 0. Les éléments de $\mathbf{Q}$ sont alors les suites constantes rationnelles (ou plutôt leur classe).

On définit $\mathbf{R}_+$ comme l'ensemble des classes d'equivalences de suite dont au moins un élément dans la classe est une suite positive rationnelle. On peut donc définir une ordre sur $\mathbf{R}$, on a $U \leq V \Leftrightarrow V - U \leq 0$.

— Montrer que l'ensemble des rationnels est dense dans $\mathbf{R}$.
— Montrer que $\mathbf{R}$ est complet.

3 Distance ultramétrique et nombre p-adique

Définition 3.1. Soit X un espace, on dit que $d : X \times X \to \mathbf{R}_+$ est une distance ultramétrique si c'est un distance telle que $d(x,z) \leq \max(d(x,y), d(y,z))$

Remarque 3.2. Les espaces munies de distance ultramétriques ont une géométrie très bizarre.

Exercice 16. Soit X un espace ultramétrique et soit $D \subset X$ un disque de X. Montrer que tout point de D est un centre de D.

Définition 3.3. Soit A un anneau, une valuation sur A est une application v telle que
— $v(0) = +\infty, v(1) = 1$
— $v(xy) = v(x) + v(y)$.
— $v(x+y) \geq \min(v(x), v(y))$.

Exercice 17. Soit $A = \mathbf{Z}$, montrer que toutes les valuations p-adiques pour p premier sont des valuations. Montrer que l'on peut les étendre à des valuations sur $\mathbf{Q}$.

Exercice 18. Montrer que la valeur absolue définie par $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ définit une distance ultramétrique sur $\mathbf{Z}$ et sur $\mathbf{Q}$.

Remarque 3.4. Avec la norme p-adique, la suite p^n tend vers 0....

Définition 3.5. On définit $\mathbf{Z}_p$ comme le complété de $\mathbf{Z}$ pour la norme p-adique. C'est aussi un anneau. On peut montrer que $\mathbf{Z}_p$ est l'ensemble des nombres infinis écrit en base p. C'est à dire qu'un élément a de $\mathbf{Z}_p$ est de la forme

$$a = \cdots a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0, \quad (0 \leq a_i \leq p-1)$$

Avec les règles de multiplication et d'addition que l'on connait pour les nombres de taille finie.

La valuation p-adique de a se lit comme $v_p(a) = \max\{k \geq 0 \mid \forall i \leq k, a_i = 0\}$.

Exercice 19. On considère A un arbre binaire complet infini. C'est à dire que A a une racine et que chaque noeud a exactement 2 enfants. Soit X l'ensemble des branches (infinies de A), on définit v de la manière suivante : Soit 2 branches b, b', il existe une branche finie $b \cap b'$, on appelle t le dernier noeud de $b \cap b'$ et on pose $d(b, b') =$ la profondeur de t dans l'arbre.

Montrer que X est en fait $\mathbf{Z}_2$, que 0 correspond à la branche où l'on va toujours à gauche et que d correspond à la distance 2-adique.