Compter l'infini et l'au-delà

1 Ensembles

Dans la théorie des ensembles de Cantor, on peut se représenter un ensemble comme un sac contenant divers objet distincts. Les ensembles permettent de formaliser de grands pans des mathématiques et sont un des piliers du système ZF. Cette théorie répond au besoin de formaliser une notion "intuitive" afin de mieux comprendre et de pouvoir étudier d'autres objets, notamment l'infini. Lorsque l'on emprunte cette route, on est amené à rencontrer de drôles d'énergumènes ...

1.1 Notation et définitions élémentaires

Un ensemble peut se noter <u>en extension</u>, c'est à dire en listant ses éléments.
Par exemple : $\{poire, banane\}$.
Ou bien <u>en compréhension,</u> c'est à dire en donnant une propriété caractérisant ses éléments.
Par exemple : {l'ensemble des entiers pairs}

Cette propriété est intimement liée à la notion de choix sur certains éléments d'un ensemble, notamment l'axiome de sélection. On peut "raffiner" une sélection en appliquant un critère supplémentaire.
Par exemple : {l'ensemble des entiers pairs divisibles par trois}. Attention cependant aux limites de la théorie, voir paradoxe de Russel et de Berry, par exemple.

Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.

Dans un ensemble l'ordre des éléments n'a pas d'importance, ainsi $\{1, 2\} = \{2, 1\}$

L'ensemble vide, noté $\emptyset$ est par convention l'ensemble qui ne contient aucun élément. (exemple : $\{(x, y) \in \mathbf{R} : x^2 + y^2 = 1\}$)

1.2 Opérations

On définit l'union de deux ensembles $\cup$ ainsi. Soient A et B des ensembles, alors F=$A \cup B$ est l'ensemble qui contient tous les éléments de A et tous les éléments de B.
Exemple : $\{1, 2\} \cup \{2, 3\} = \{1, 2, 3\}$

L'intersection de deux ensembles est l'ensemble formé des éléments partagés par A et B.
Exemple : $\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$
$\{1,4\} \cap \{0,3\} = \emptyset$
L'ensemble des parties d'un ensemble E, noté $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble contenant tous les sous-ensembles de E. C'est en quelque sorte tous les "sous-sacs" que l'on peut réaliser avec les éléments de E.

Exercice : Expliciter $\mathcal{P}(E)$ pour

1. E=$\{0,1\}$
2. E=$\{a,b,c\}$
3. E=$\emptyset$
4. E=$\mathcal{P}(\emptyset)$

   Quelles conclusions pouvez-vous tirer sur le cardinal(le nombre d'éléments) de $\mathcal{P}(E)$?

2 Injection, surjection, bijection

Soient E, G et F des ensembles Soit f une application $E \to F$

Définition .1. *f est injective lorsque, pour tout f(x) et f(y) tels que f(x)=f(y), alors x=y.*

Définition .2. *f est surjective lorsque, pour tout $y \in F$, il existe un $x \in E$ tel que f(x) = y.*

Définition .3. *f est bijective lorsque, pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que f(x) = y.*

En particulier, f est bijective lorsque f est injective et surjective. On peut alors faire des paires entre les ensembles d'arrivée et de départ, et définir une bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$

(Voir au tableau pour les exemples, dessinez les patates.)

Théorème de Cantor Bernstein : s'il existe une injection de E vers F et une injection de F vers E alors il existe une bijection entre E et F

Exercice : Soit f une application $E \to F$ une application injective et soit g une application $F \to G$ injective. Montrez que $g \circ f$ est injective

Soit f une application $E \to F$ une application surjective et soit g une application $F \to G$ surjective. Montrez que $g \circ f$ est surjective

3 Dénombrabilité

Définition .4. *Un ensemble E est dit dénombrable lorsqu'il existe une bijection entre E et* $\mathbf{N}$ *ou une partie de* $\mathbf{N}$.

Les ensembles finis sont dénombrables. Nous allons montrer que Z et Q sont dénombrables.

Cheminement : chercher une bijection entre Z et N.

Chercher une injection entre N et Q+ puis entre Q+ et N*N, puis finalement entre N*N et **N**