La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

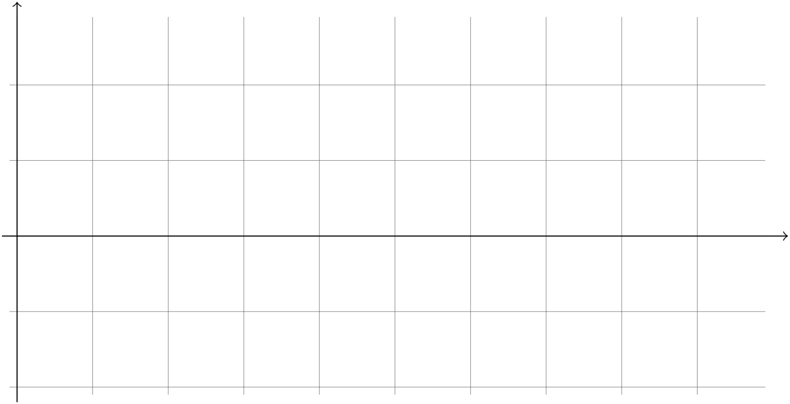
Lisa Balsollier et Emilien Manent

3 décembre 2022

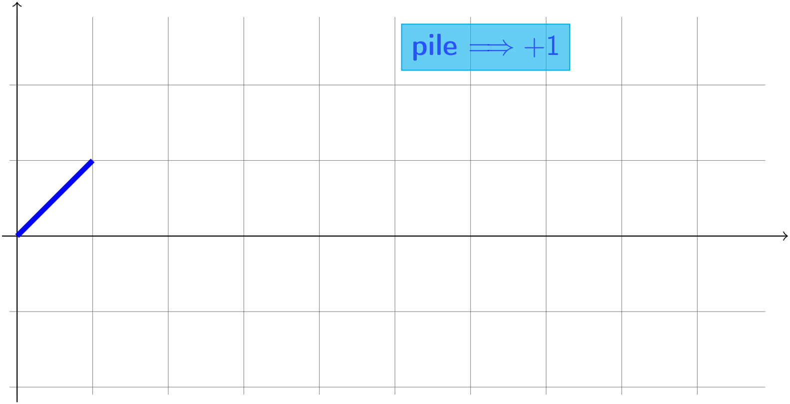
Contexte

- L'aléatoire a été introduit pour modéliser les événements physiques que l'on ne peut pas prévoir.
- L'expérience du pile ou face est la brique de base pour fabriquer tout type d'expérience aléatoire.
- La marche aléatoire est une façon d'illustrer une succession de pile ou face.

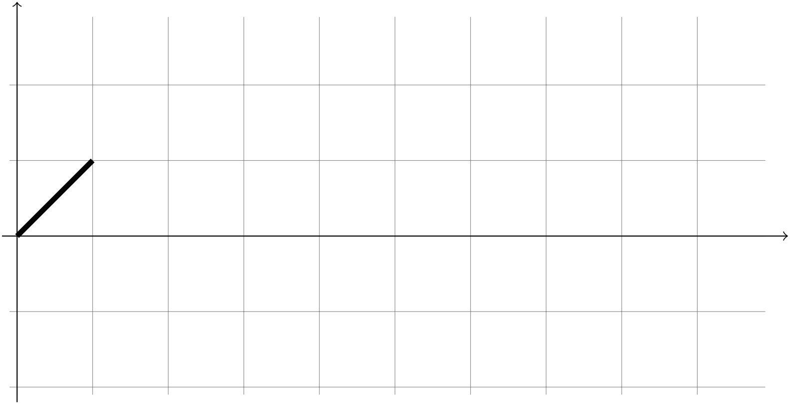
Définition avec l'exemple du pile ou face



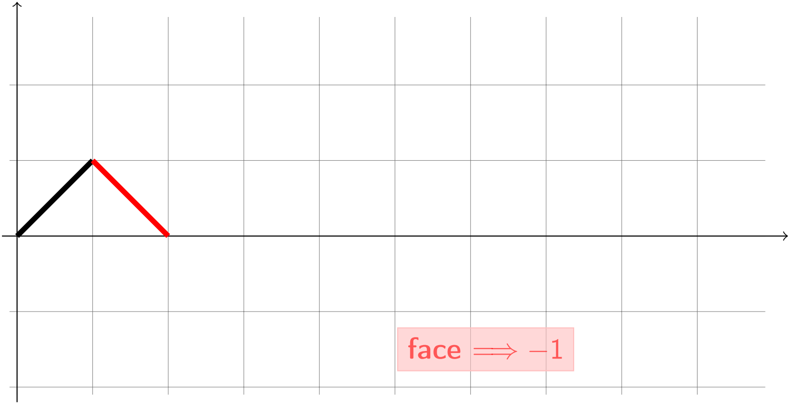
Définition avec l'exemple du pile ou face



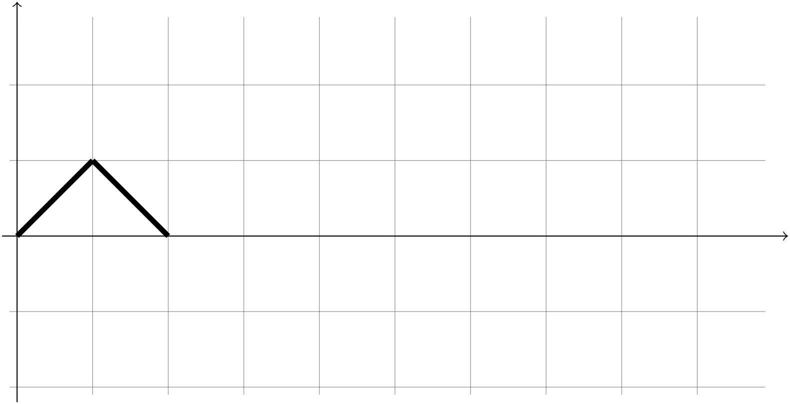
Définition avec l'exemple du pile ou face



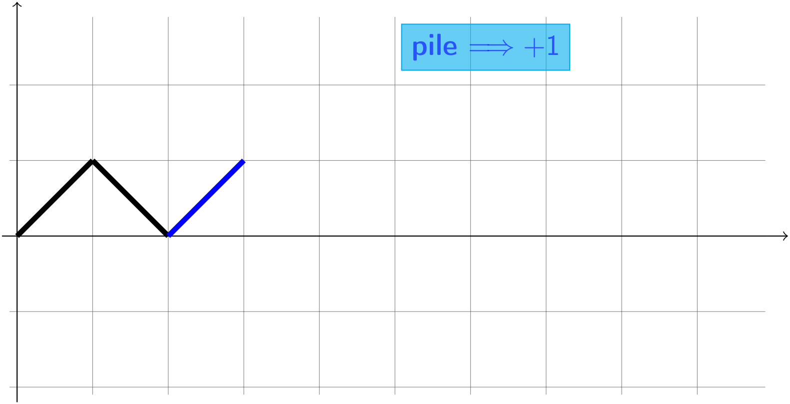
Définition avec l'exemple du pile ou face



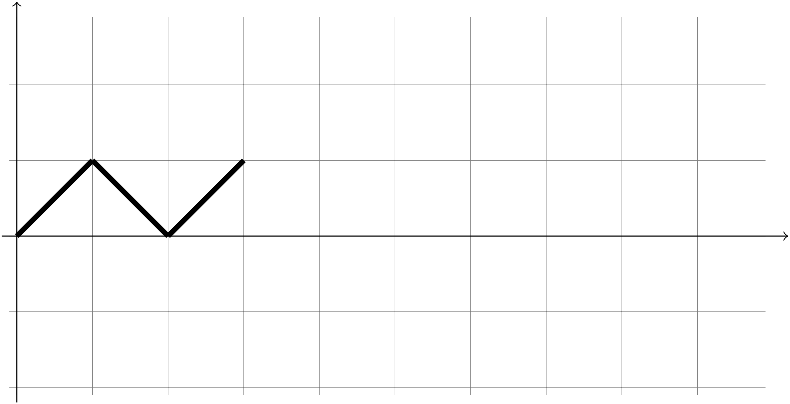
Définition avec l'exemple du pile ou face



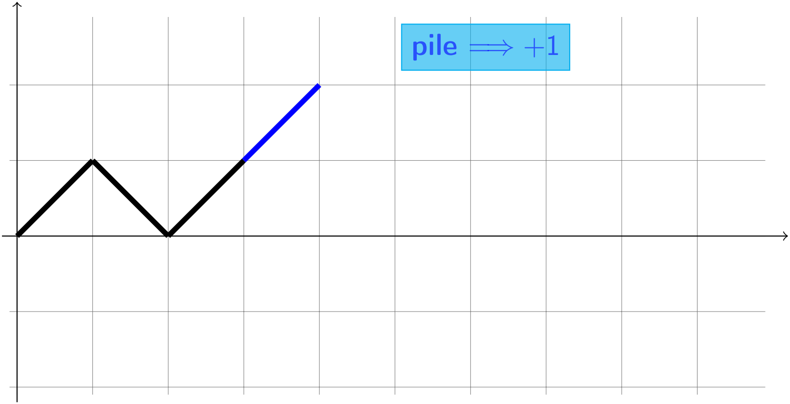
Définition avec l'exemple du pile ou face



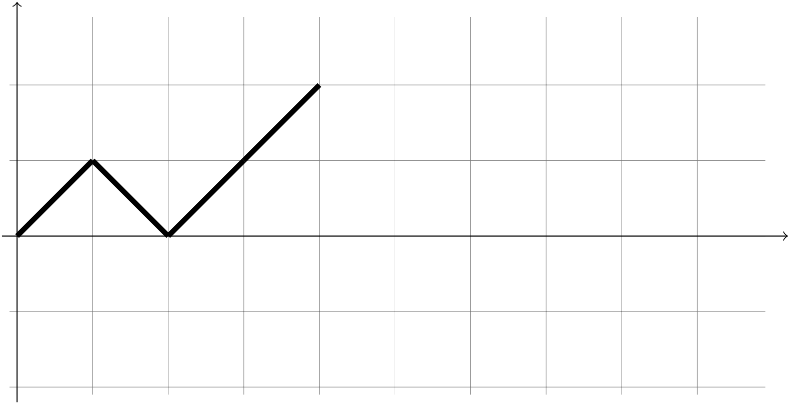
Définition avec l'exemple du pile ou face



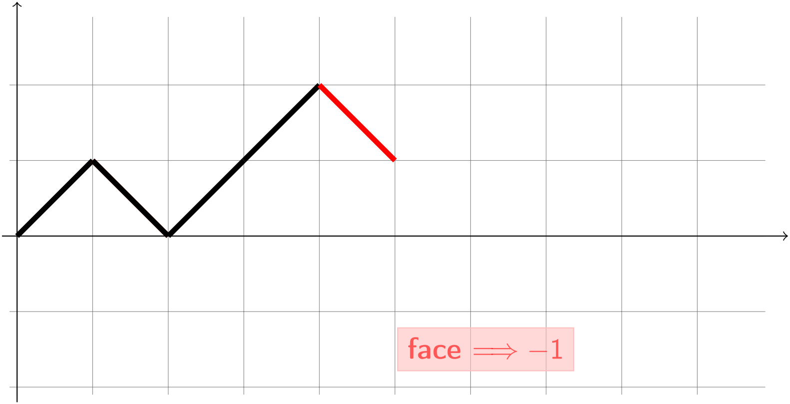
Définition avec l'exemple du pile ou face



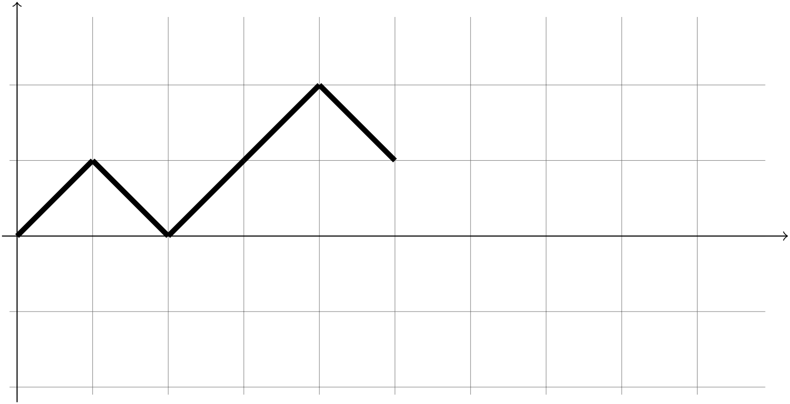
Définition avec l'exemple du pile ou face



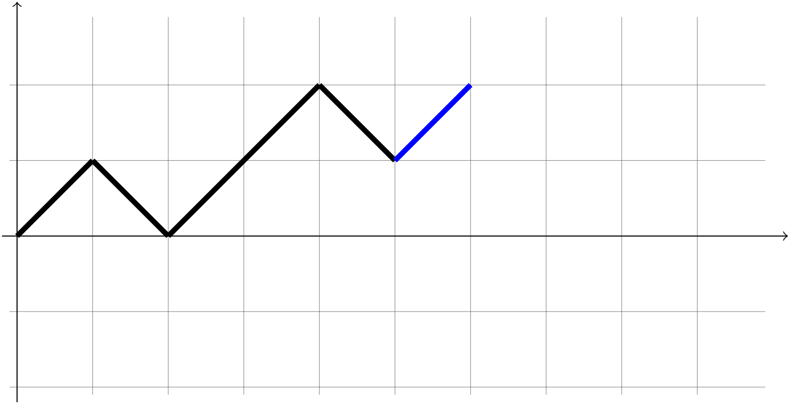
Définition avec l'exemple du pile ou face



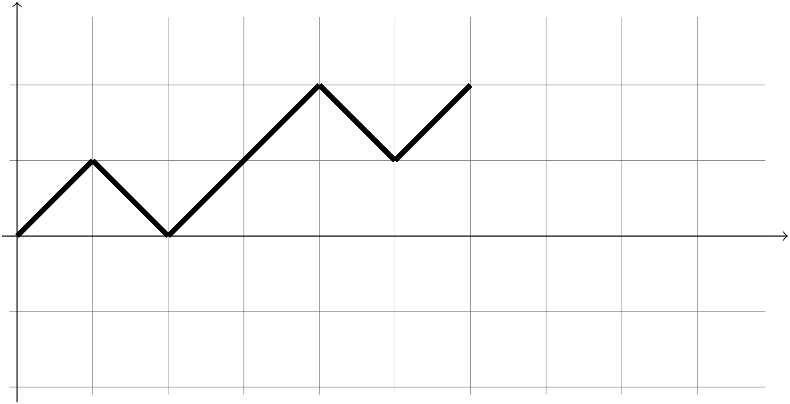
Définition avec l'exemple du pile ou face



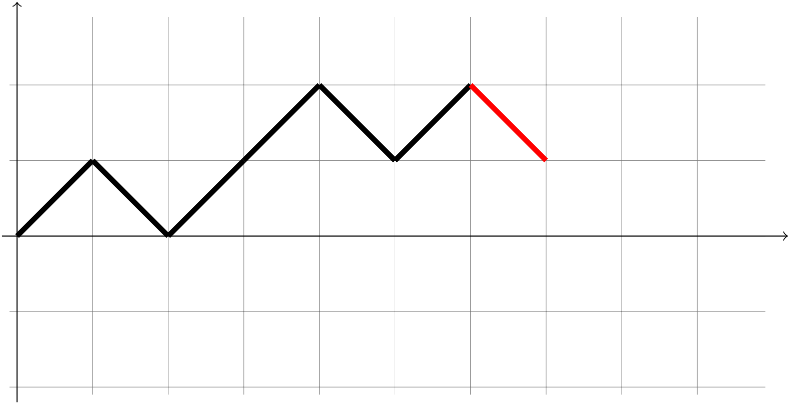
Définition avec l'exemple du pile ou face



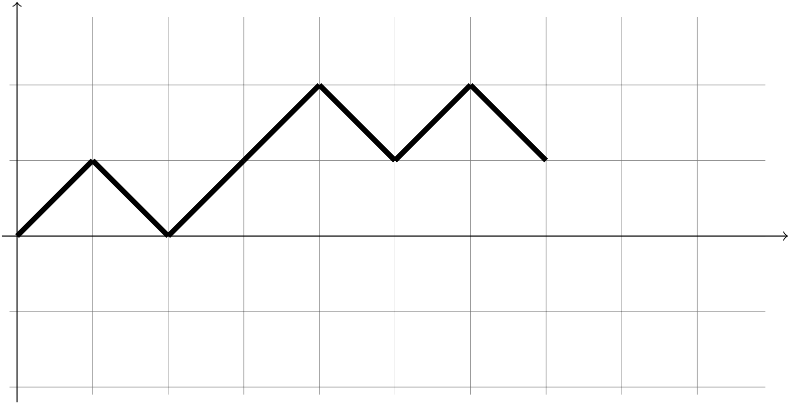
Définition avec l'exemple du pile ou face



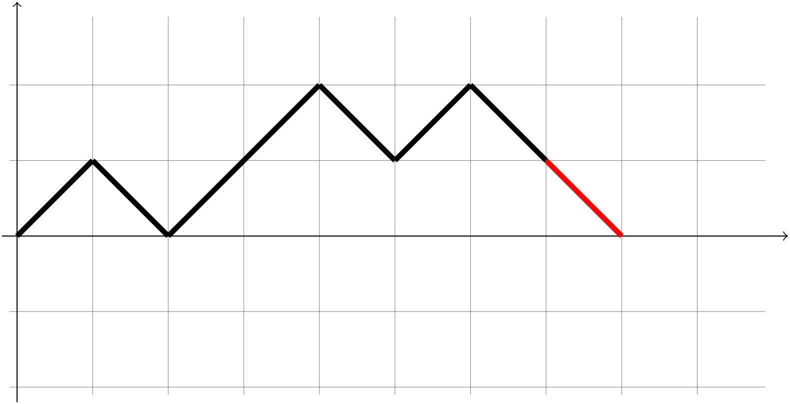
Définition avec l'exemple du pile ou face



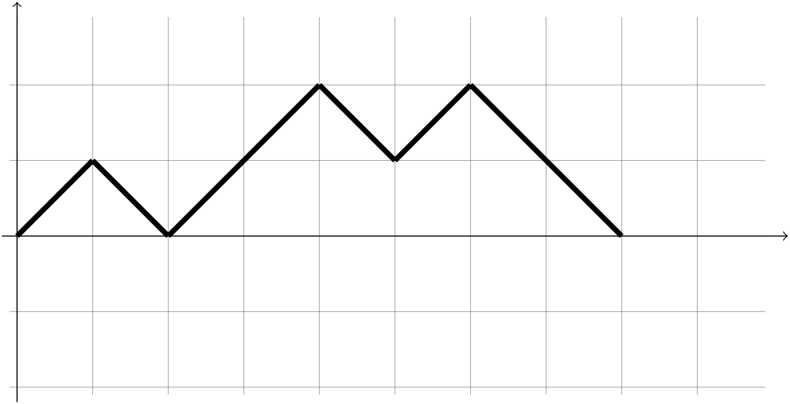
Définition avec l'exemple du pile ou face



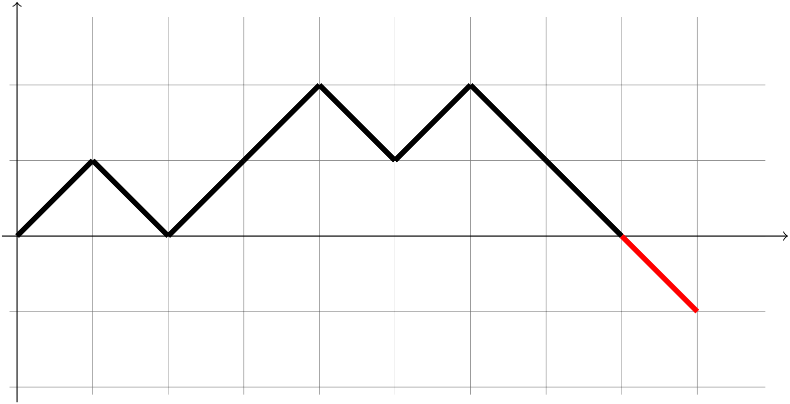
Définition avec l'exemple du pile ou face



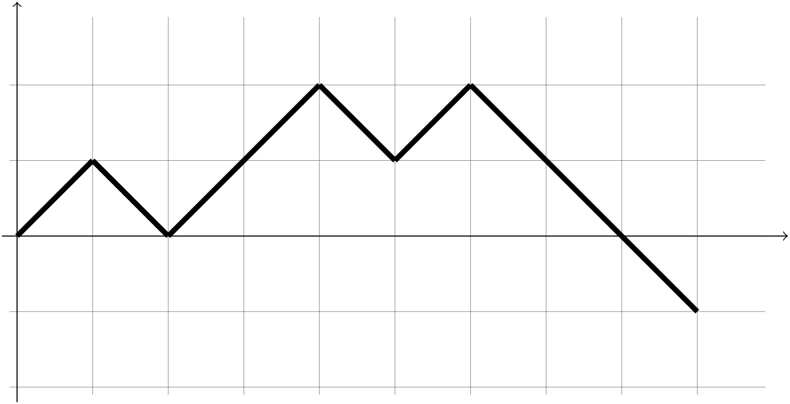
Définition avec l'exemple du pile ou face



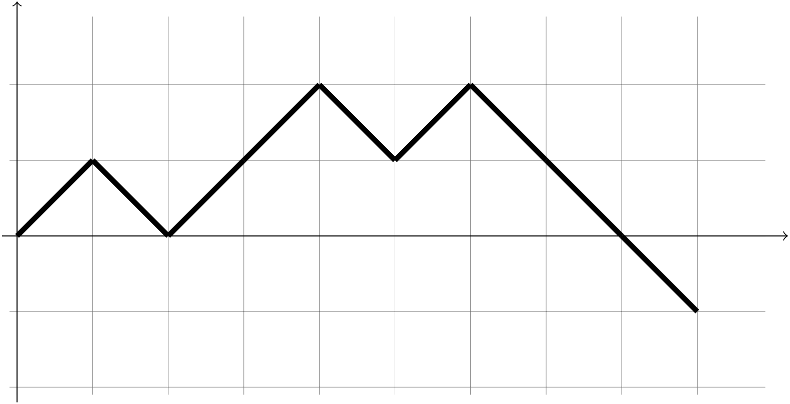
Définition avec l'exemple du pile ou face



Définition avec l'exemple du pile ou face

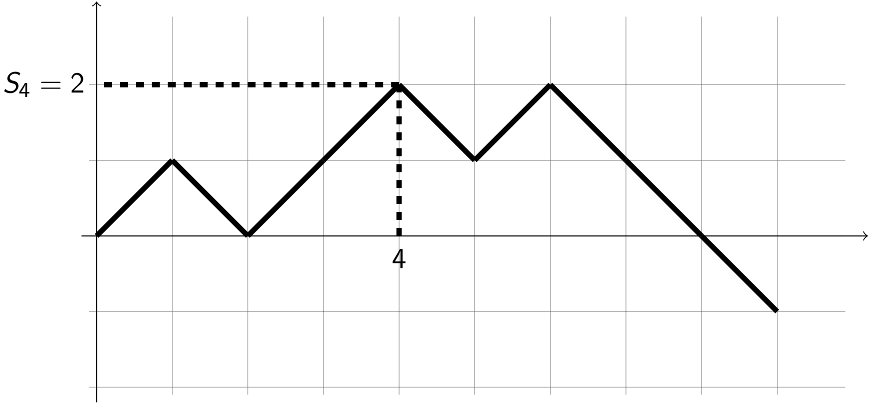


Définition avec l'exemple du pile ou face



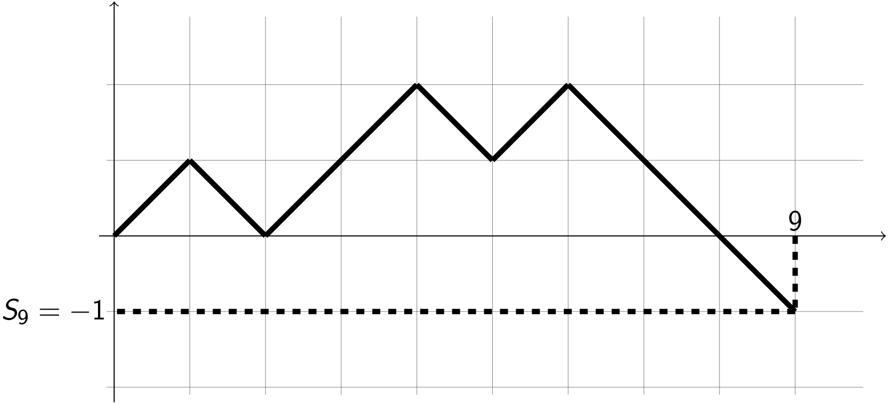
S_n la hauteur où on est après le n-ième coup.

Définition avec l'exemple du pile ou face



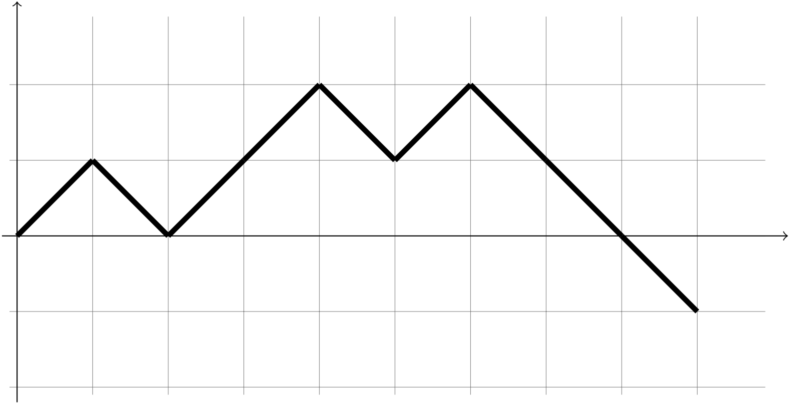
S_n la hauteur où on est après le n-ième coup.

Définition avec l'exemple du pile ou face



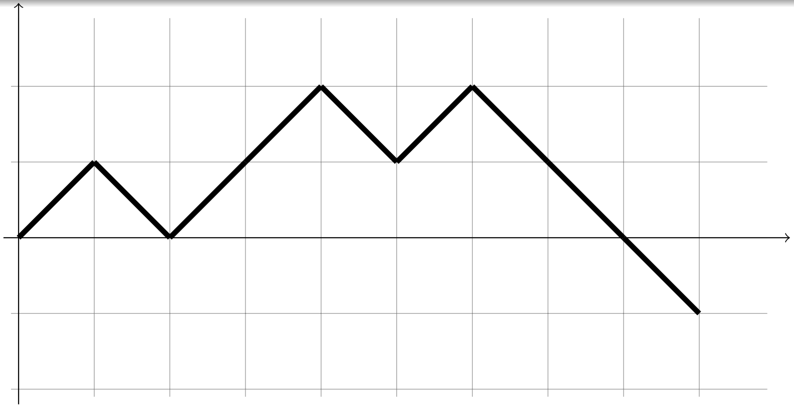
S_n la hauteur où on est après le n-ième coup.

Définition avec l'exemple du pile ou face



La ligne brisée est appelée *marche aléatoire*.

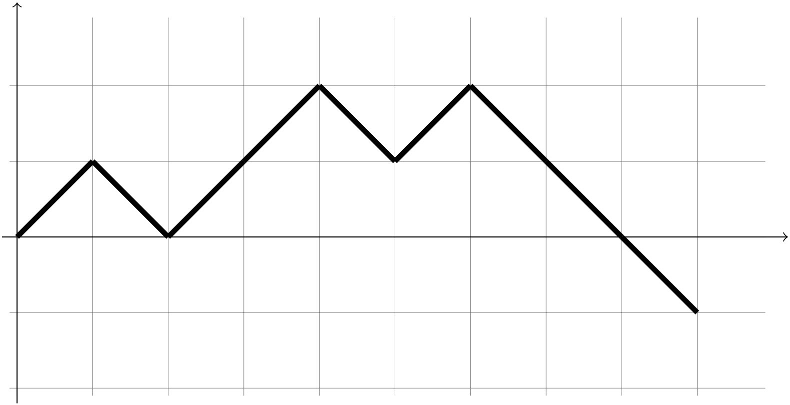
Définition avec l'exemple du pile ou face



La ligne brisée est appelée *marche aléatoire.*

✎ **Quelles sont les valeurs prises par S_n ?**

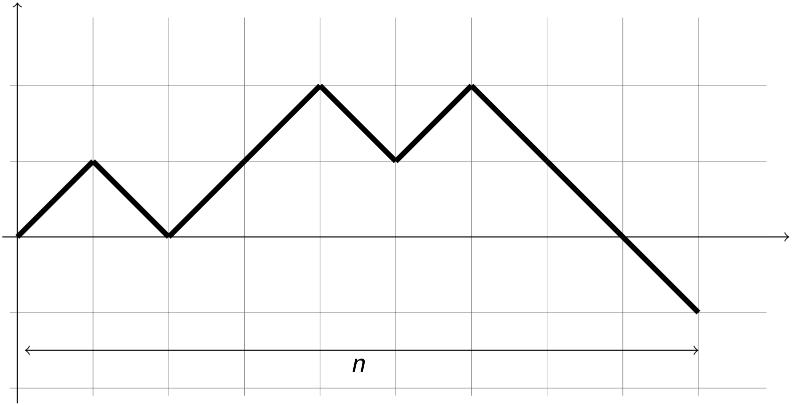
Définition avec l'exemple du pile ou face



La ligne brisée est appelée *marche aléatoire.*

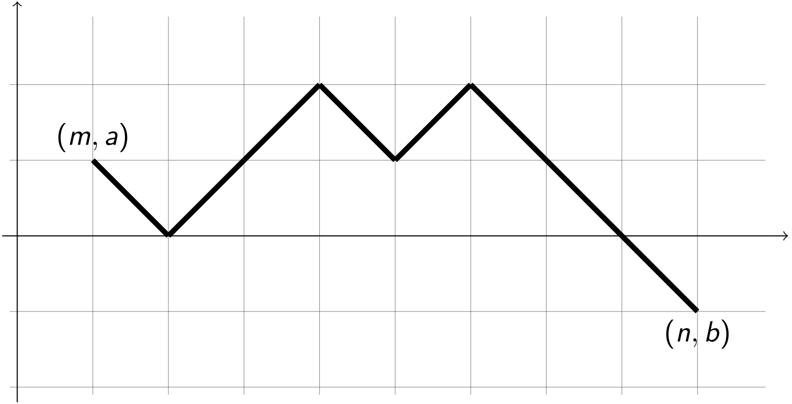
✎ Exprimez le nombre de piles (=de montées) P_n obtenus lors des n premiers pas en fonction de S_n et n.

Chemins possibles pour la marche aléatoire



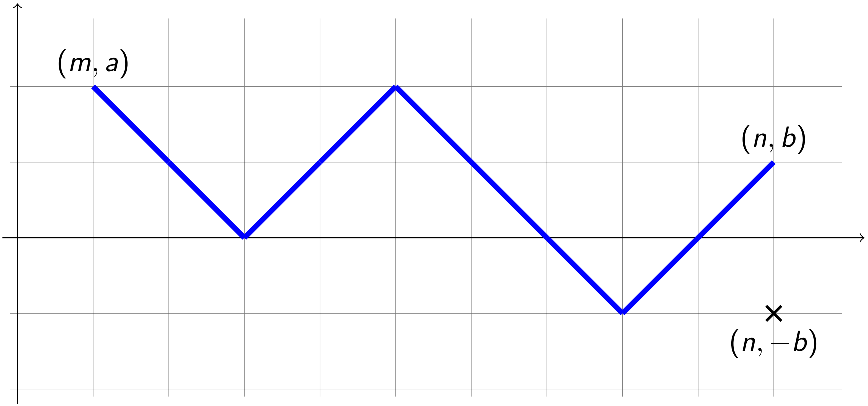
✎ **Combien existe-t-il de lignes brisées de taille n ?**

Nombre de chemins



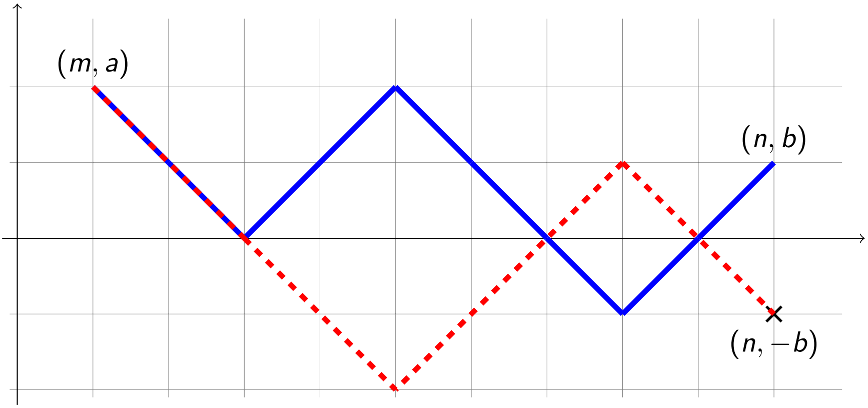
✎ **Soient (m, a) et (n, b) deux couples d'entiers avec $n > m$. Calculer le nombre de chemins possibles de (m, a) vers (n, b).**

Principe de réflexion



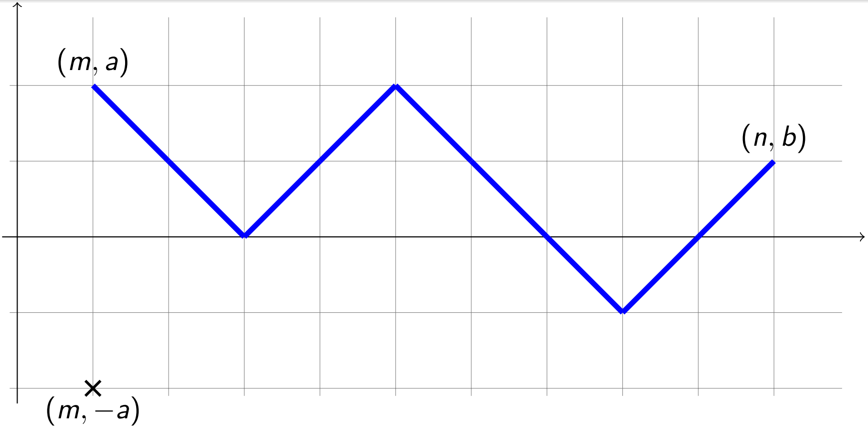
✎ **Soient a et b des entiers strictement positifs. Montrer que le nombre de chemins de (m, a) vers (n, b) passant par zéro est égal au nombre de chemins de (m, a) vers $(n, -b)$.**

Principe de réflexion



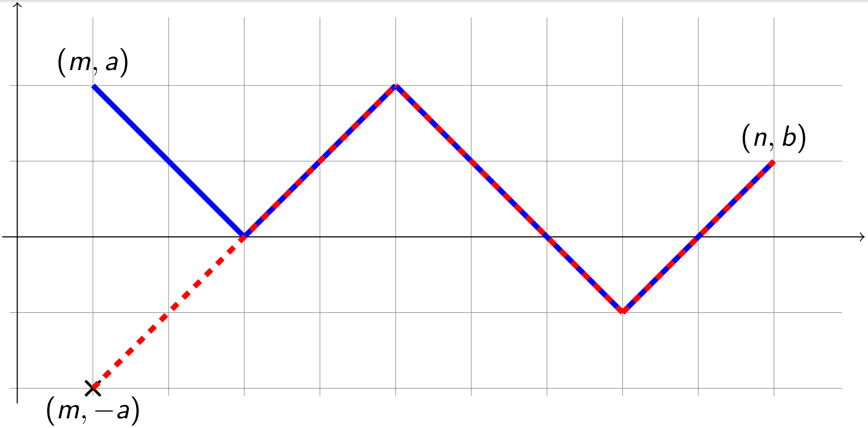
✎ Soient a et b des entiers strictement positifs. Montrer que le nombre de chemins de (m, a) vers (n, b) passant par zéro est égal au nombre de chemins de (m, a) vers $(n, -b)$.

Deuxième principe de réflexion



✎ Remarque : Soient a et b des entiers strictement positifs. Le nombre de chemins de (m, a) vers (n, b) passant par zéro est égal au nombre de chemins de $(m, -a)$ vers (n, b).

Deuxième principe de réflexion



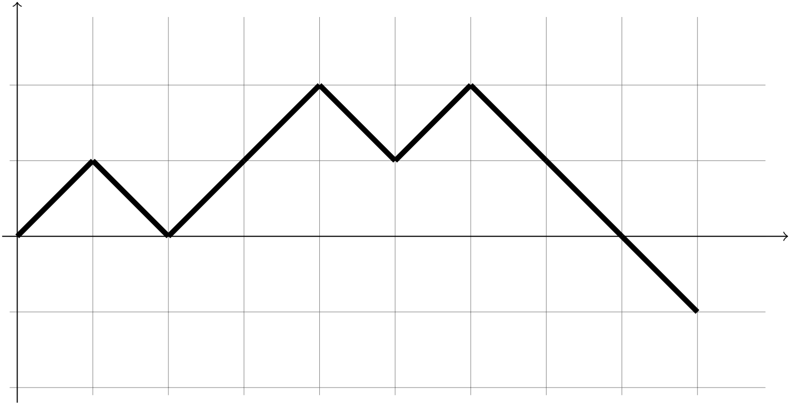
✎ Remarque : Soient a et b des entiers strictement positifs. Le nombre de chemins de (m, a) vers (n, b) passant par zéro est égal au nombre de chemins de $(m, -a)$ vers (n, b).

Application : Problème du dépouillement

✎ **À l'issue d'une élection opposant deux candidats A et B, le candidat A obtient 600 voix et le candidat B obtient 400 voix.**

1. **Modéliser le dépouillement avec une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.**
2. **Exprimer le nombre total de dépouillements possibles.**
3. **Calculer le nombre de dépouillements possibles durant lesquels le candidat A reste en tête (au sens strict) tout le long du dépouillement.**
4. **En déduire la probabilité que A reste en tête (au sens strict) tout le long du dépouillement.**
5. **En s'inspirant des questions précédentes, calculer la probabilité que A reste en tête (au sens large) tout le long du dépouillement.**

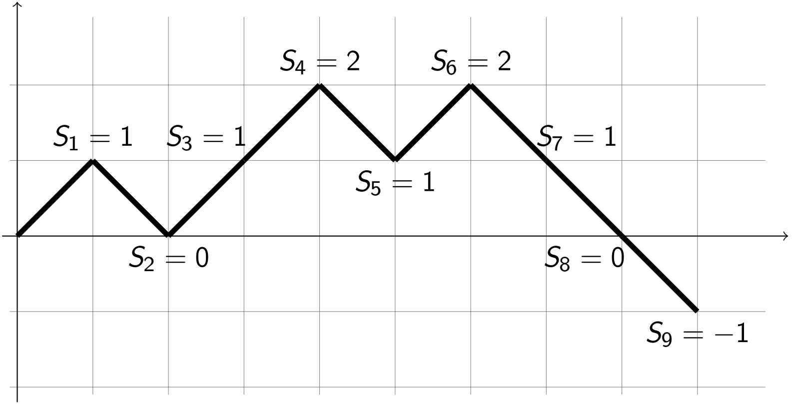
Retour en 0



✎ **Comparer la parité de S_n et de n.**

✎ **Qu'est-ce que cela signifie sur les retours en zéro ?**

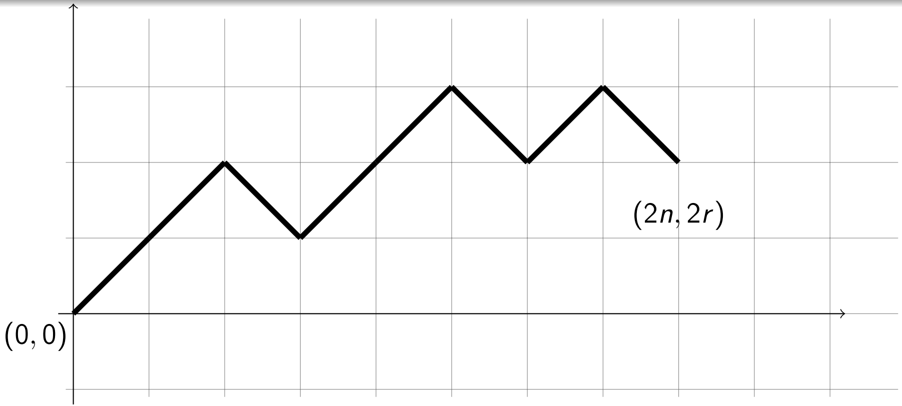
Retour en 0



✎ **Comparer la parité de S_n et de n.**

✎ **Qu'est-ce que cela signifie sur les retours en zéro ?**

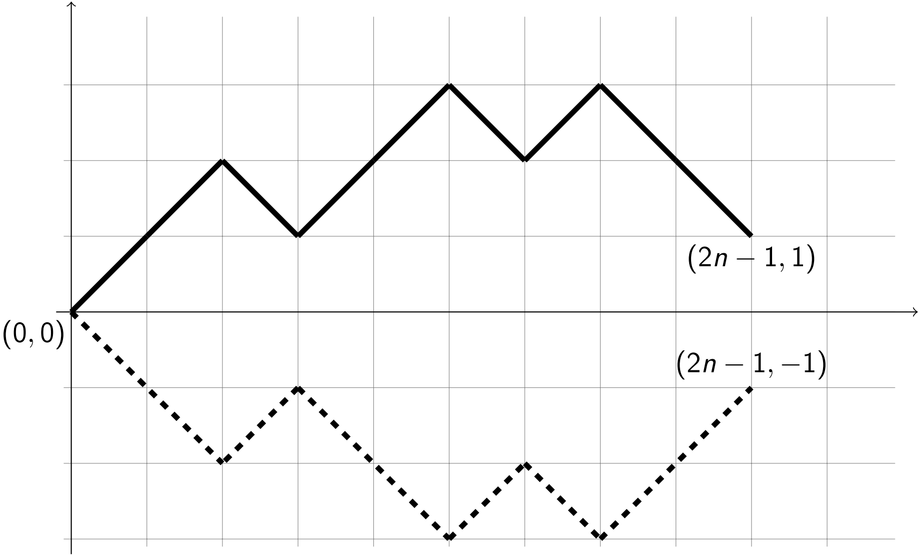
Premier retour en 0



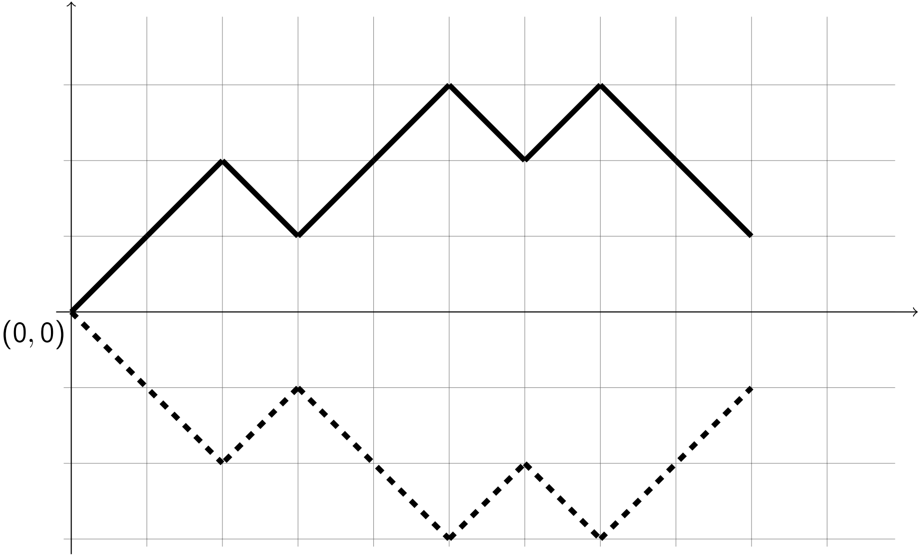
✎ **Soit** $r \geq 1$. **Calculer le nombre de chemins vérifiant** $\{S_2 > 0,\ S_4 > 0, \ldots,\ S_{2n-2} > 0,\ S_{2n} = 2r\}$.

✎ **En déduire que le nombre de chemins vérifiant** $\{S_2 > 0,\ S_4 > 0,\ \ldots,\ S_{2n-2} > 0,\ S_{2n} > 0\}$ **vaut** $N_{(2n-1,1)}$.

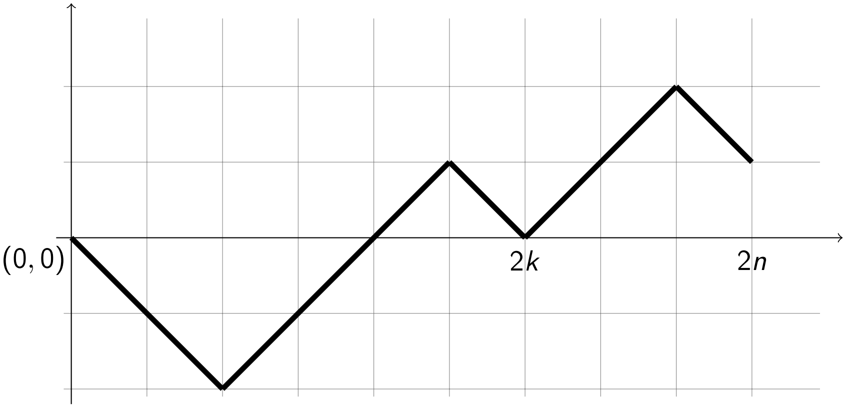
Retour en 0



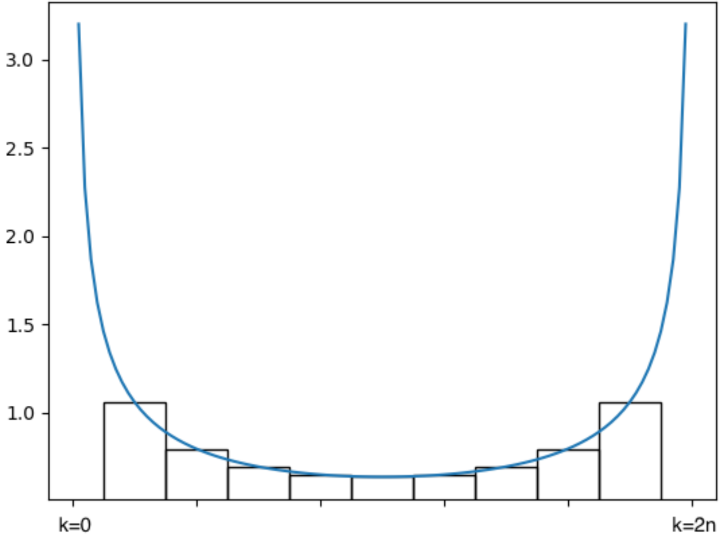
Retour en 0



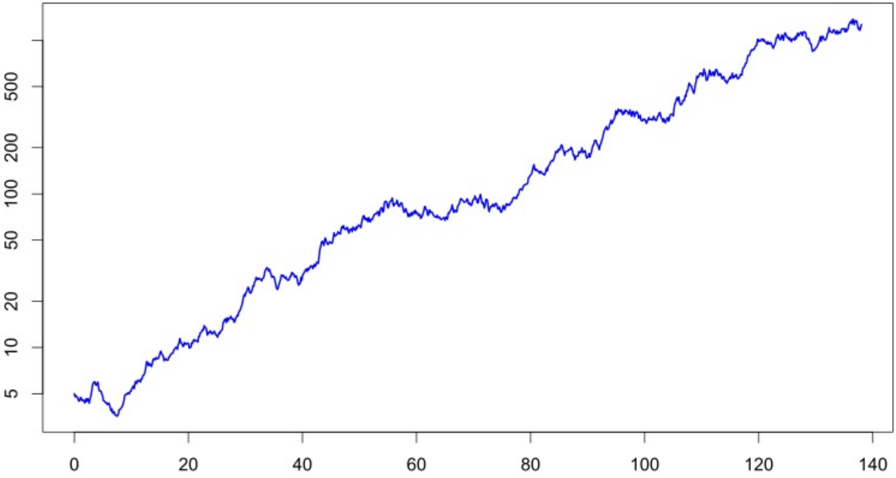
Dernier passage en 0



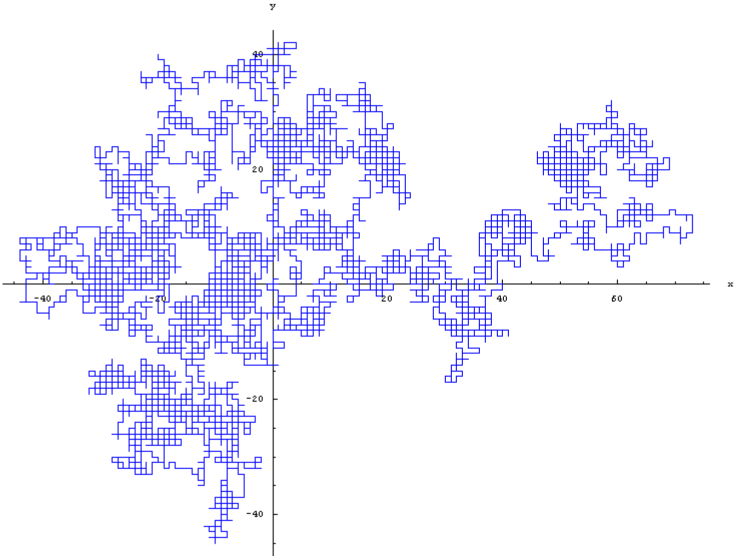
Si n tend vers $+\infty$



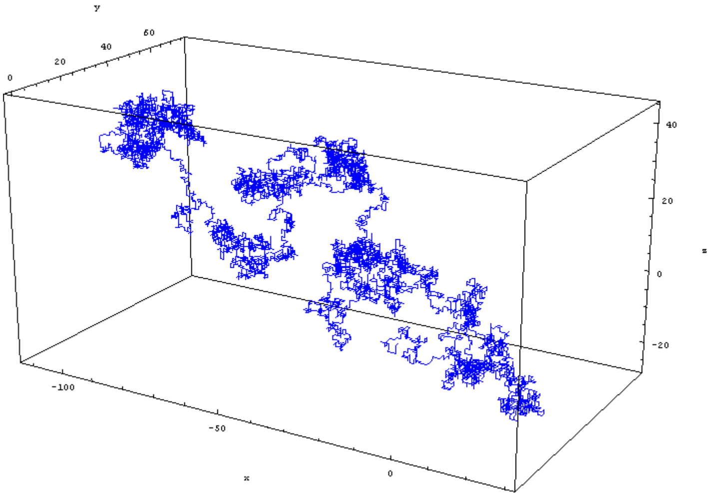
Si $p \neq \frac{1}{2}$



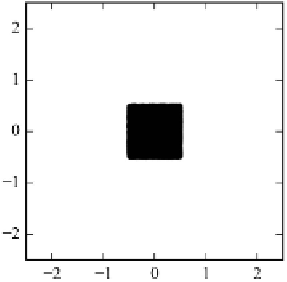
En dimension 2

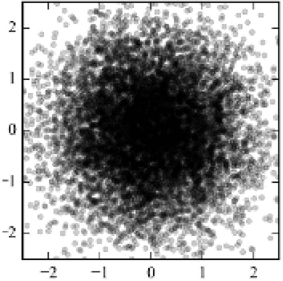


En dimension 3



Application aux diffusions





Merci pour votre attention !