TD série formelle

16 novembre 2021

Exercice 1 :
Soit (u_n) une suite linéaire récurrente à coefficients constants sur un corps $\mathbf{k}$. La suite vérifie la relation

$$u_{n+d} = p_{d-1}u_{n+d-1} + \cdots + p_0 u_n.$$

Soit P le polynôme $X^d - p_{d-1}X^{d-1} - \cdots - p_0$. On considère le $\mathbf{k}$-espace vectoriel $\mathbf{k}[X]/(P)$ muni de la base $(1, X, \cdots, X^{d-1})$. Soit M la matrice compagnon de P.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & & p_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & p_{d-2} \\ & & 1 & p_{d-1} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que pour tout $i \geq 0$,
$$\begin{pmatrix} u_i \\ \vdots \\ u_{d+i-1} \end{pmatrix} = (u_0, \cdots, u_{d-1})M^i.$$
2. Montrer que M est la matrice de l'application de multiplication par $x := X \mod P$ dans la base $(1, \ldots, X^{d-1})$.
3. Soit V_k la première colonne de M^k montrer que les coefficients de V_k sont les coefficients de x^k dans la base $(1, X, \cdots, X^{d-1})$.
4. En déduire un algorithme de calcul de u_N de complexité $O(M(d) \log N)$.

Exercice 2 :
Soit $f = \sum_{n \geq 0} f_n X^n$ une série formelle, on définit la dérivée formelle de f par

$$f'(X) = \sum_{n \geq 1} n f_n X^{n-1}$$

1. Montrer que $(f+g)' = f' + g'$. On admet que l'application $f \mapsto f'$ est continue.
2. Montrer que $(fg)' = f'g + fg'$.
3. En déduire que pour tout $k \geq 0, (f^k)' = kf'f^{k-1}$.
4. Montrer que $(f \circ g)' = g' \cdot f' \circ g$.

Exercice 3 :
Soit f une série formelle qui vérifie l'équation $f' = g \cdot f$. On impose $f_0 = 0$, résoudre alors l'équation

différentielle.

Exercice 4 :
Soit $\mathbf{k} = \mathbf{Q}$, on définit les séries formelles

$$f(X) = \exp(X) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} X^n \text{ et } g = \log(1+X) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} X^n$$

1. Montrer que $f' = f$ et $g' = \frac{1}{1+X}$.
2. Montrer que $f \circ g = g \circ f = 1 + X$. (Indice, poser $h = f \circ g$ et trouver une équation différentielle vérifiée par h.
3. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et r un entier, on définit $\binom{\alpha}{r} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1)}{r!}$. Montrer que
$$(1+X)^\alpha := \exp(\alpha \log(1+X)) = \sum_{r\geq 0} \binom{\alpha}{r} X^r$$

Exercice 5 :
Soit a_n le nombre d'arbres binaires à n sommets. On considère la série formelle $A = \sum_n a_n T^N$.

1. Montrer que $a_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1, a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}$.
2. En déduire que A vérifie l'équation
$$A(T) = 1 + TA^2(T).$$
3. En déduire que
$$A(T) = \frac{1 - \sqrt{(1-4T)}}{2T}.$$
4. Montrer que pour tout entier $r \geq 0$,
$$\binom{1/2}{r} = \frac{2}{4^r}(-1)^{r-1}\binom{2r-1}{r-1}.$$
5. Conclure que
$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$