TD ALBA Résultants et algorithme d'Euclide rapide

26 octobre 2020

Exercice 1 :
Soient $A(T) = \frac{1-T^2}{1+T^2}$ et $B(T) = \frac{2T}{1+T^2}$. Montrer que le calcul du résultant en T des numérateurs de $X - A(T)$ et $Y - B(T)$ donne que la courbe $(A(T), B(T))$ a pour équation $X^2 + Y^2 = 1$.

Exercice 2 :
Soit $f \in [X]$ de degré n de coefficient dominant a_n. On définit le discriminant de f que l'on note $\operatorname{disc}(f)$ par

$$\operatorname{Res}(f, f') = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n \operatorname{disc}(f).$$

1. Donner le discriminant d'un polynôme de degré 2.
2. Soit $f(X) = X^3 + pX + q$. Donner le discriminant de f.

<++>

Exercice 3 :
Soient $A = \prod_i (X - \alpha_i)$ et $B = \prod_j (X - \beta_j)$ et C des polynômes unitaires de $\mathbf{K}[X]$ avec C et A premiers entre eux. Alors

1. $\operatorname{Res}_X(A(X), B(T - X)) = \prod_{i,j}(T - (\alpha_i + \beta_j))$.
2. $\operatorname{Res}_X(A(X), B(T + X)) = \prod_{i,j}(T - (\beta_j - \alpha_i))$.
3. $\operatorname{Res}_X(A(X), X^{\deg B} B(T/X)) = \prod_{i,j}(T - \alpha_i\beta_j)$.
4. $\operatorname{Res}_X(A(X), C(X)T - B(X)) = \operatorname{Res}(A, C) \prod_i \left(T - \frac{B(\alpha_i)}{C(\alpha_i)}\right)$.

En déduire que l'ensemble des nombres algébriques sur un corps $\mathbf{K}$ est un corps avec une preuve effective.

Exercice 4 :
Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique nulle. Si $f \in \mathbf{K}[X]$, f se factorise en produit de polynômes irréductibles $f = f_1^{\alpha_1} \cdots f_t^{\alpha_t}$ avec les f_i irréductibles sur $\mathbf{K}$ et 2 à 2 distincts. La *partie sans carré* de f est le produit $f_1 \cdots f_t$. Montrer que l'on peut calculer les coefficients de la partie sans carré de f en $O(M(n) \log n)$ opérations dans $\mathbf{K}$.

Exercice 5 :
Soient $f, g \in \mathbf{K}[X]$ des polynômes unitaires.

1. Soit N un entier non nul, montrer que l'unique polynôme unitaire de $\mathbf{K}[X]$ dont les racines sont les puissances N-ièmes des racines de f peut être obtenu à l'aide d'un résultant.
2. Si f est le polynôme minimal d'un nombre algébrique α, montrer qu'on peut déterminer un polynôme annulateur de $g(\alpha)$ à l'aide d'un résultant.
3. Calculer le polynôme minimal sur $\mathbf{Q}$ de $\alpha = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$.