# Topologie sur les ensembles de matrices

Marc Abboud

3 Février 2021

Dans toute la suite, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

## 1 Rappel de topologie

On rappelle quelques définitions et résultats classiques. Dans un espace vectoriel normé (ou plus généralement un espace métrique), un ouvert est une partie $O$ telle que pour tout $x \in O$, il existe une boule centrée en $x$ inclus dans $O$. Un fermé est par définition le complémentaire d'un ouvert, une caractérisation équivalente est que toute suite convergente d'un fermé a sa limite dans le fermé.

Un compact est un espace dans lequel toute suite admet une valeur d'adhérence.

**Exercice 1.** Un compact est fermé.

Dans un espace vectoriel normé *de dimension finie*, les compacts sont exactement les espaces fermés et bornés.

**Exercice 2.** Montrer que dans un compact, toute suite admettant une unique valeur d'adhérence est convergente.

Une application est continue si l'image réciproque de tout ouvert est ouvert (ou de tout fermé est fermé). L'image directe d'un compact est compact (c'est faux pour l'image réciproque en général).

## 2 Premiers résultats

**Exercice 3.** L'application $\chi : A \in M_n(\mathbf{K}) \mapsto \chi_A \in \mathbf{K}[X]_{\leq n}$ est une application polynomiale entre espaces vectoriels de dimension finie.

**Exercice 4.** Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert dense de $M_n(\mathbf{K})$.

**Exercice 5.** Le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ est un fermé d'intérieur vide de $M_n(\mathbf{K})$.

**Exercice 6.** Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Q})$ est dense dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

**Exercice 7.** L'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbf{C})$.
Sur $\mathbf{R}$ son adhérence est l'ensemble des matrices trigonalisables.

**Exercice 8.** Donner l'intérieur des matrices diagonalisables. (Penser au résultant)

Pour la preuve sur $\mathbf{R}$, il y a plusieurs manières de procéder. En raisonnant en terme de polynôme, il faut montrer qu'un polynôme limite de suite de polynômes scindés est scindé mais cela requiert d'être un peu précis en terme de topologie. L'autre idée est de montrer d'abord que l'ensemble des matrices trigonalisables est un fermé à l'aide du procédé de Gram-Schmidt et que l'adhérence des matrices diagonalisables contient les matrices trigonalisables.

**Exercice 9.** Pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbf{C})$, on a $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

**Exercice 10.** Montrer le théorème de Cayley-Hamilton. Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbf{C})$, on a $\chi_A(A) = 0$.

**Exercice 11.** Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est connexe par arc. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ admet exactement deux composantes connexes (par arcs).

**Exercice 12.** Montrer qu'une classe de similitude n'est jamais ouverte (penser à la trace).

# 3 Compacité dans les groupes de matrices

**Exercice 13.** Les groupes $O_n(\mathbf{R})$ et $U_n(\mathbf{C})$ sont compacts.

**Exercice 14.** On va montrer le résultat suivant : tout sous-groupe compact $G$ de $GL_n(\mathbf{R})$ est inclus dans un groupe orthogonal. C'est à dire qu'il existe un produit scalaire eucliden pour lequel les éléments de $G$ agissent par isométrie.

1. Montrer que cela revient à trouver une matrice symétrique définie positive $S$ telle que pour tout $g \in G, {}^t gSg = S$.
2. Montrer que l'enveloppe convexe d'un compact est compact. On pourra utiliser le théorème de Carathéodory

   **Théorème 3.1.** *Dans un espace affine de dimension $n$, l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble $A$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de familles de $n+1$ points de $A$.*

3. Soit $K$ un compact convexe stable par $f \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$, montrer que $f$ admet un point fixe dans $K$.
4. Soit $G$ un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbf{R})$, montrer qu'il existe une norme invariante par $G$.
5. Montrer que si $G$ stablise un compact $K$, alors il existe un point fixe commun à tous les éléments de $G$ dans $K$.
6. On considère l'application $\rho : G \Rightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{S}_n)$ donné par l'action par conjugaison de $G$. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}$ est convexe. On pose alors $K = \{{}^t MM : M \in G\}$. Conclure.

**Exercice 15.** Décomposition polaire. On veut montrer que les applications

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbf{R}) & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \\ (Q,S) & \mapsto & QS \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lll} \mathrm{O}_n(\mathbf{R}) \times \mathrm{S}_n^{++}(\mathbf{R}) & \to & \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \\ (Q,S) & \mapsto & SQ. \end{array}\right.$$

sont des homéomorphismes. On admet que cette application existe et est inversible. On cherche à montrer que son inverse est continue.

<++>