TD 5 - mercredi

mercredi 10 mars 2021 08:21

Exercice 1

Rappel : • Si une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique alors elle est diagonalisable en base orthonormée.

Autrement dit, il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $M = UDU^T$ avec D diagonale.

↳ c'est-à-dire $UU^T = U^TU = I_n$

↳ ses termes diagonaux sont les valeurs propres de M

• Les coefficients de la matrice D sont les zéros de la fonction $\lambda \mapsto \det(M - \lambda I_n)$

• M est $\begin{cases} \text{semi-définie positive ssi les coefficients de } D \text{ sont } \geq 0. \\ \text{définie positive ssi les coefficients de } D \text{ sont } > 0. \end{cases}$

Application : les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ sont les zéros de $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2$
$= (ac-b^2) - (a+c)\lambda + \lambda^2$

1) M symétrique est $\begin{cases} \text{définie positive si } \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ x^TMx > 0. \\ \text{semi-définie positive si } \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ x^TMx \geq 0. \end{cases}$

(ou $\forall x \in \mathbb{R}^n$)

2) a $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2$ a pour racines 1 et 1. Ce sont des réels > 0, donc M est symétrique définie positive.

b Soit $x \in \mathbb{R}^2$ $\quad x^TMx = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (\ldots) = x_1^2 + x_2^2 > 0$ lorsque $x \neq 0$.

---

a $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)$ a pour racines 0 et 1. M est semi-définie positive.

b Soit $x \in \mathbb{R}^2$ $\quad x^TMx = x_2^2 \geq 0, \quad = 0$ lorsque $x_2 = 0$.

---

a $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$ a pour racines 1 et -1. M n'est pas semi-définie positive

b Trouver un $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^TMx < 0$. Prenons $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors $x^TM = (1 \quad -1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1 \quad 1)$

donc $x^TMx = (-1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 < 0$.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique.

---

a $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 4$. $\quad (\lambda-1)^2 - 4 = 0 \iff \lambda - 1 = \pm 2 \iff \lambda = -1$ ou 3.

M n'est pas semi-définie positive.

b $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors $x^TMx = (1 \quad -1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1 \quad 1)(-2) < 0$.

---

a $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 2 = \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$. Les racines sont $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, et $\frac{3 - \sqrt{17}}{2} < 0$.

donc M n'est pas semi-définie positive.

b $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $x^TMx = -1 < 0$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

→ 1) $\quad \mathrm{Cov}(X,Y)^2 \leq \mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)$ $\quad$ pour X, Y variables aléatoires.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

1) $\mathrm{Cov}(X,Y)^2 \leq \mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)$ pour X,Y variables aléatoires.

2) $\langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2\,\|y\|^2$ pour x, y dans $\mathbb{R}^n$

3) $\left(\int fg\,d\mu\right)^2 \leq \left(\int f^2 d\mu\right)\left(\int g^2 d\mu\right)$ pour toutes fonctions $f, g \in L^2(\mu)$.

« Une matrice M est <u>semi-définie</u> positive ssi il existe un vecteur gaussien ayant pour matrice de covariance M. »

Donc si M est semi-définie positive, en prenant $X \sim \mathcal{N}(0, M)$, on a $M_{ij}^2 = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)^2 \underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} \mathrm{Var}(X_i)\mathrm{Var}(X_j) = M_{ii}M_{jj}$

$$\begin{cases} \bullet\ M_{ii} \geq 0 \text{ pour tout } i \quad (\text{car } \mathrm{Var}(X_i) \geq 0) \\ \bullet\ M_{ij}^2 \leq M_{ii}M_{jj} \text{ pour tout } i, j. \end{cases}$$

---

* Soient X et Y deux v.a. gaussiennes.

On n'a <u>pas</u> toujours (X,Y) vecteur gaussien

↳ On doit supposer (X,Y) vecteur gaussien avec $\mathrm{Var}(X)=1$ $\mathrm{Var}(Y)=2$ et $\mathrm{Cov}(X,Y)=-2$.

* (X,Y) est bien d'espérance $(1,1)$, mais sa matrice de covariance est

$$\begin{array}{c} \mathrm{Var}(X) \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ \mathrm{Var}(Y) \end{array} \left.\vphantom{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}\right\} \text{pas semi-définie positive.}$$

* Si $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, alors $AZ \sim \mathcal{N}(A\mu, A\Sigma A^T)$

Ici, $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ donc $(X+Y, X-Y) \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{?}\right)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

D'où

$$\boxed{\begin{pmatrix} X+Y \\ X-Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overset{<0!}{-1} & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\right)}$$

On a $\mathrm{Cov}(X,Y)^2 = 4 > 2 \times 1 = \mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)$: il ne peut pas exister un tel couple de v.a..

Exercice 3

On note $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ les « nouveaux » X et Y.

1) $\begin{cases} \overline{Y} = Y \\ \overline{X}_1 = X_1 \end{cases}$ $\quad \overline{X}_2 = X_1^2 \quad \overline{X}_3 = X_1 X_2^2$

Alors $\overline{Y} = \underbrace{\overline{X}}_{(\overline{X}_1\ \overline{X}_2\ \overline{X}_3)} \underbrace{w}_{\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}} + \varepsilon$

<u>Observé</u> : les X_i, les Y_i.

<u>Pas observé</u> : w et ε.

Donc on a droit de transformer les X_i et les Y_i comme on veut.

2) $\begin{cases} \overline{Y} = Y^2 \end{cases}$

$(x_1 \; x_2 \; x_3)$

2) $\begin{cases} \bar{Y} = Y^2 \\ \bar{X}_1 = 1 \quad \bar{X}_2 = X_1 \quad \bar{X}_3 = X_2 \end{cases}$

Alors $\bar{Y} = \bar{X} w + \varepsilon$.

3) $\begin{cases} \bar{Y} = \log(Y) \\ \bar{X}_1 = \log(X_1) \quad \bar{X}_2 = \log(X_2) \quad \bar{X}_3 = \log(4) \end{cases}$ $\log(Y) = w_1 \log(X_1) + w_2 \log(X_2) + w_3 \log(4) + \log(\varepsilon)$

$\bar{\varepsilon} = \log(\varepsilon)$

Alors $\bar{Y} = \bar{X} w + \bar{\varepsilon}$

4) $\begin{cases} \bar{Y} = \log(Y) \\ \bar{X}_1 = X_1 \quad \bar{X}_2 = \log(X_2) \end{cases}$

Alors $\bar{Y} = \bar{X} w + \varepsilon$

5) $$\bar{Y} = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(5)} \\ \vdots \\ y^{(t)} \end{pmatrix} = w_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) \\ \vdots \\ \cos(\frac{\pi 5}{6}) \\ \vdots \\ \cos(\frac{\pi t}{6}) \end{pmatrix}}_{\bar{X}_1} + w_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 5 \\ \vdots \\ t \end{pmatrix}}_{\bar{X}_2} + w_3 \underbrace{\begin{pmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(5)} \\ \vdots \\ X^{(t)} \end{pmatrix}}_{\bar{X}_3} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)} \\ \vdots \\ \varepsilon^{(5)} \\ \vdots \\ \varepsilon^{(t)} \end{pmatrix}}_{\bar{\varepsilon}}$$

Alors $\bar{Y} = \bar{X} w + \bar{\varepsilon}$

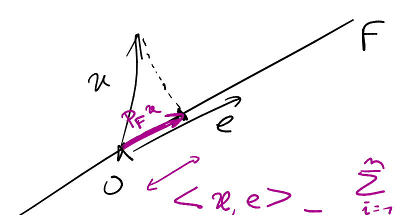
$$\bar{X} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{6}) & 1 & X^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\frac{\pi 5}{6}) & 5 & X^{(5)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\frac{\pi t}{6}) & t & X^{(t)} \end{pmatrix}$$

Exercice 4

1 a) Oui, $\mathbb{X}$ est un vecteur gaussien : $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma^2 & & 0 \\ & \sigma^2 & \\ 0 & & \ddots \; \sigma^2 \end{pmatrix}}_{\sigma^2 I_n} \right)$

(car les composantes de $\mathbb{X}$ sont des v.a. gaussiennes indépendantes)

b) $F = \mathrm{Vec}(e) \qquad e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$



$P_F X = \dfrac{\langle X, e \rangle}{\|e\|} \times \dfrac{e}{\|e\|}$

$\dfrac{\langle x, e \rangle}{\|e\|} = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i e_i}{\left(\sum_{i=1}^n e_i^2\right)^{1/2}} = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sqrt{n}}$

$= \dfrac{\langle X, e \rangle}{\|e\|^2} e = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} e$

$P_F X = \begin{pmatrix} \bar{X}_n \\ \vdots \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} X - \bar{X} \end{pmatrix}$

$$\boxed{P_F X = \begin{pmatrix} \overline{X}_n \\ \vdots \\ \overline{X}_n \end{pmatrix}}$$

c) $P_F + P_{F^\perp} = I_n$ donc $P_{F^\perp} = I_n - P_F$, d'où $\boxed{P_{F^\perp} X = \begin{pmatrix} X_1 - \overline{X}_n \\ \vdots \\ X_n - \overline{X}_n \end{pmatrix}}$.

d) $(n-1)\hat{\sigma}_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2 = \| P_{F^\perp} X \|^2$

F est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^n$ et $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$

donc d'après le théorème de Cochran, $\frac{1}{\sigma^2} \| P_{F^\perp} X \|^2 \sim \chi^2(n-1)$

pas oublier

donc $\boxed{\frac{n-1}{\sigma^2} \hat{\sigma}_n^2 \sim \chi^2(n-1)}$.

e) Le théorème de Cochran assure que $P_F X$ et $P_{F^\perp} X$ sont indépendants

donc $\underbrace{(P_F X)_1}_{= \overline{X}_n \text{ d'après 1 b)}}$ et $\underbrace{\| P_{F^\perp} X \|^2}_{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}$ sont indépendants.

donc $\overline{X}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$ sont indépendants.

f) $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{n})$, donc $\frac{\sqrt{n}\,\overline{X}_n}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Notons $Z = \frac{\sqrt{n}\,\overline{X}_n}{\sigma}$.

$(n-1)\frac{\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$. Notons $U = (n-1)\frac{\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2}$.

Alors comme par 1 e), Z et U sont indépendants, $\frac{Z}{\sqrt{U/(n-1)}} \sim \mathcal{T}(n-1)$

Or $\frac{Z}{\sqrt{U/(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}\,\overline{X}_n / \cancel{\sigma}}{\sqrt{\cancel{(n-1)}\,\hat{\sigma}_n^2 / (\cancel{\sigma^2}\cancel{(n-1)})}} = \frac{\sqrt{n}\,\overline{X}_n}{\sqrt{\hat{\sigma}_n^2}} = \frac{\overline{X}_n}{\hat{\sigma}_n / \sqrt{n}}$.

D'où le résultat attendu.

2) • On veut tester si l'incertitude de mesure a changé.

H0 : pas de changement H1 : changement

• La loi des mesures réalisées par l'appareil est une loi gaussienne de variance σ^2 inconnue.
Les mesures sont indépendantes et de même loi.
On veut comparer σ à l'incertitude $\sigma_0 = 0{,}7$ du précédent appareil.

H0 : $\sigma = \sigma_0$ H1 : $\sigma \neq \sigma_0$.

• La statistique de test va se fonder sur $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$ lorsqu'on mesure un échantillon $X_1, \dots, X_n$.

$\rightarrow T$ $(T :$ $\hat{\sigma} = 1{,}12$ avec $n = 100)$

- La statistique de test va se fonder sur $\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2$ lorsqu'on [illegible] $X_1, \dots, X_n$.

  (Ici $\hat{\sigma}_n = 1{,}12$ avec $n = 100$)

  Sous H0, $\overbrace{\frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma_0^2}}^{T} \sim \chi^2(n-1)$.

- Région de rejet $R = [0, s] \cup [t, +\infty)$: sous H1 → pas de raison que cela soit plus grand ou plus petit que sous H0

  0 : parce $T \geq 0$ p.s

- Niveau : 5%. On veut $\underbrace{\mathbb{P}_{H_0}(T \in R)}$ $\leq 5\%$.

$$= \mathbb{P}_{H_0}(T \leq s) + \mathbb{P}_{H_0}(T \geq t)$$

$$= \mathbb{P}_{T \sim \chi^2(n-1)}(T \leq s) + \mathbb{P}_{T \sim \chi^2(n-1)}(T \geq t).$$

Si on prend $s =$ quantile d'ordre 2,5% de $\chi^2(n-1)$ $\quad \mathbb{P}(T \leq s) \leq 2{,}5\%$.

Si on prend $t =$ ———— 97,5% de $\chi^2(n-1)$ $\quad \mathbb{P}(T \geq t) \leq 2{,}5\%$.

<u>Application</u> : $n = 100$, $\quad s = 73{,}4 \quad$ et $\quad t = 128{,}4$

donc $\quad R = [0\,;\,73{,}4] \cup [128{,}4\,;\,+\infty)$.

- T observé : $T = 99 \times \frac{1{,}12^2}{0{,}7^2} \sim 253 \in R$.

  Donc on rejette H0 : on peut conclure avec un test de niveau 5% que l'incertitude du nouvel appareil est différente de celle du précédent appareil.