

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

Théorème: M est diagonalisable en base orthonormée, c'est-à-dire

$$\exists \text{ existe } U \in O_n(\mathbb{R}) \text{ et } (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } M = U \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} U^T$$

$O_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices U telles que $UU^T = U^T U = I_n$, autrement dit dont les colonnes (ou lignes) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Propriété: Les d_i sont les racines du polynôme $\lambda \mapsto \det(M - \lambda I_n)$.

Propriété: Une matrice symétrique M ayant pour valeurs propres $(d_i)_{1 \leq i \leq n}$ est:

- semi-définie positive si $d_i \geq 0$ pour tout i
- définie positive si $d_i > 0$ pour tout i .

Donc on regarde les racines de $\lambda \mapsto \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

- $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$ a pour racine double $1 > 0$
donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est définie positive.

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 > 0 \text{ dès que } (x, y) \neq (0, 0)$$

- $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)$ a pour racines 0 et 1
donc semi-définie positive.

- $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$ a pour racines -1 et $+1$
donc pas semi-définie positive.

Prendons $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors $x^T M x = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $x^T M x = -2 < 0$.

- La matrice m' est pas symétrique.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 - 4 \quad (\lambda-1)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda-1 = \pm 2 \\ \Leftrightarrow \lambda \in \{-1, 3\}$$

donc pas semi-définie positive.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 2 = \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 - 2 - \frac{9}{4} = \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

donc les racines sont $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, et $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2} < 0$
donc pas semi-définie positive.

Exercice 2

$$X \sim \mathcal{N}(1, 1)$$

$$Y \sim \mathcal{N}(1, 2)$$

$$\text{avec } \text{Cov}(X, Y) = -2$$

Pas semi-définie positive!! (*)



pas évident! On aurait dû supposer $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ vecteur gaussien.
 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien, alors
... / $\mathbb{E}(X)$ / $\text{Var}(X)$ / $\text{Cov}(X, Y)$ / ...

avec $\text{Cov}(X,Y) = -2$ Si $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien, alors

$Y \sim \mathcal{N}(1, 2)$

Alors $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} \mathbb{E}[X] \\ \mathbb{E}[Y] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \text{Var}(X) & \text{Cov}(X,Y) \\ \text{Cov}(X,Y) & \text{Var}(Y) \end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix} X+Y \\ X-Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

donc $\begin{pmatrix} X+Y \\ X-Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$

Si $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$
Alors $AZ \sim \mathcal{N}(A\mu, A\Sigma A^T)$

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables gaussiennes indépendantes, alors $(X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien. C'est le seul cas où « coller » des variables gaussiennes donne un vecteur gaussien!

Inégalité de Cauchy-Schwarz: Pour toutes v.a. X et Y ,
 $\text{Cov}(X,Y)^2 \leq \text{Var}(X) \text{Var}(Y)$.
 $(-2)^2 \nleq 2 \times 1$ donc il n'existe pas de (X,Y) avec ces variances et covariance.

Exercice 3 • On observe X et Y .

En particulier, on a le droit de les modifier comme on veut:
remplacer Y par Y^2 , $\sqrt{Y}$, $\log(Y)$...
remplacer X_1 par X_2 , par X_3^2 , $\exp(X_1)$, ...

• On n'observe pas β et ε .
On veut estimer β .

• $Y = X\beta + \varepsilon$: $\forall i \in \{1, \dots, d\}$, $Y_i = X_{i1}\beta_1 + X_{i2}\beta_2 + \dots + X_{ip}\beta_p + \varepsilon_i$

Si $d=1$, $Y = X_1\beta_1 + \dots + X_p\beta_p + \varepsilon$.

Dans les questions, on cherche $\bar{Y}$ et $\bar{X}$ définis à partir de Y et X tels que
 $\bar{Y} = \bar{X}\beta + \bar{\varepsilon}$ (préciser le lien entre β et $\bar{w}$ et entre ε et $\bar{\varepsilon}$).

1) $\beta = w$. On a $Y = w_1 \overset{\uparrow X_1}{(\dots)_1} + w_2 \overset{\uparrow X_1^2}{(\dots)_2} + w_3 \overset{\uparrow X_1 X_2^2}{(\dots)_3} + \varepsilon$

Donc on prend $\bar{Y} = Y$ et $\bar{X} = (X_1, X_1^2, X_1 X_2^2)$. (et $\beta = w$, $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$).

2) $\beta = w$. $\bar{Y} = Y^2$ alors $\bar{Y} = \overset{\uparrow X_1}{1} \times w_1 + \overset{\uparrow X_1}{X_1} \times w_2 + \overset{\uparrow X_2}{X_2} \times w_3 + \varepsilon$

$\bar{X} = (1, X_1, X_2)$. (et $\beta = w$, $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$).

3) On passe au $\log$: $\log(Y) = w_1 \log X_1 + w_2 \log X_2 + w_3 \log 4 + \log \varepsilon$

On prend $\bar{Y} = \log(Y)$

$\bar{X} = (\dots)$

On prend $\overline{Y} = \log(Y)$

$$\bar{X} = (\log X_1, \log X_2, \log 4) \quad (\text{let } \bar{\Sigma} = \log \Sigma, \beta = \mu)$$

4) $\bar{Y} = \log Y$ $\bar{X} = (X_1, \log X_2)$ $\beta = \alpha$

$$5) \quad Y = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(s)} \\ \vdots \\ y^{(t)} \end{pmatrix} = w_1 \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} \\ \vdots \\ \cos \frac{15\pi}{6} \\ \vdots \\ \cos \frac{11\pi}{6} \end{pmatrix} + w_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 5 \\ \vdots \\ t \end{pmatrix} + w_3 \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(s)} \\ \vdots \\ x^{(t)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon^{(1)} \\ \vdots \\ \varepsilon^{(s)} \\ \vdots \\ \varepsilon^{(t)} \end{pmatrix}$$

$$\bar{Y} = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(t)} \end{pmatrix} \quad \bar{X} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & 1 & x^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \frac{\pi s}{6} & s & x^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \frac{\pi t}{6} & t & x^{(t)} \end{pmatrix} \quad \beta = w, \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} z^{(1)} \\ \vdots \\ z^{(s)} \\ \vdots \\ z^{(t)} \end{pmatrix}$$

Ans $\bar{Y} = \bar{X}\beta + \bar{\varepsilon}$

$t \times 1$ $t \times 3$ 3×1 $t \times 1$

(2)

$\ll \quad \left| \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right| + \left| \right| \quad \gg$

Exercise 4

Si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_m)$

et F sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbb{R}^n$ (soient ind)

Also, $P_F X \perp P_{F^\perp} X$

- $\frac{\|P_F X\|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(p)$

(Il est capital que les composantes de X
de $\mathbb{R}^n$ soient i.i.d)

def: $P_F x = \arg \min_{z \in G}$

Prop: si $F = \text{Vec}(e_1, \dots, e_p)$

avec $(e_1, \dots, e_m)$ b.o.n de $\mathbb{R}^n$

et $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$

Also $P_F x = \sum_{i=1}^n u_i e_i$

Prop bonus: $x_i = \langle x, e_i \rangle$ or $\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^n a_j b_j$

1) a) Oui, $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_m)$. (Les composantes de X sont des gaussiennes indépendantes donc X est un vecteur gaussien).
 b) Soit ici $\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \|^2 = \sum_{i=1}^2 1 = 2$

b) $F = \text{Vec} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Norm $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (norm = 2)

Alors e peut être complétée en une b.o.u. de $\mathbb{R}^n$, donc

$$P_F X = \langle X, e \rangle e = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle X, e_j \rangle e_j \right) \cdot e = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \langle X, \frac{1}{\sqrt{n}} \rangle \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Progi: $P_F + P_{F\perp} = I_m$. $\forall x, P_F x + P_{F\perp} x = x$. $= \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_m \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{pmatrix}$

$$P_{F^\perp} X = X - P_F X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x}_m \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_m \\ \vdots \\ x_m - \bar{x}_m \end{pmatrix}$$

$$P_{F^\perp} X = X - P_F X = \begin{pmatrix} \vdots \\ X_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vdots \\ \bar{X}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ X_n - \bar{X}_n \end{pmatrix}$$

d) $(n-1)\hat{\sigma}_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \|P_{F^\perp} X\|^2$: comme $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$, on peut appliquer le théorème de Cochran,

donc $(n-1)\hat{\sigma}_n^2 \sim \chi^2(\text{?})$
 $\hookrightarrow \dim \text{ de } F^\perp = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(F) = n-1$

e) $P_F X$ et $P_{F^\perp} X$ sont indépendants.

En particulier, pour toutes fonctions f et g ,
 $f(P_F X)$ et $g(P_{F^\perp} X)$ sont indépendantes.

Première $f(P_F X) = (P_F X)_1 = \bar{X}_n$ et $g(P_{F^\perp} X) = \frac{\|P_{F^\perp} X\|^2}{n-1} = \hat{\sigma}_n^2$
 donc $\bar{X}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$ sont indépendants.

$\bar{X}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$
 on sait
 $P_F X = \begin{pmatrix} \bar{X}_n \\ \vdots \\ \bar{X}_n \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \|P_{F^\perp} X\|^2 \end{array} \right.$

f) Loi de $\bar{X}_n$? Comment se ramener à une $\mathcal{N}(0, 1)$? $\hookleftarrow$ comment faire pour que Z et U soient indépendantes?
 Loi de $\hat{\sigma}_n^2$? Comment se ramener à une $U \sim \chi^2(n-1)$?

$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ avec $X_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ iid. donc $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{n})$

donc $Z = \frac{\sqrt{n} \bar{X}_n}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$

D'après 1d), $\frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma^2} = U \sim \chi^2(n-1)$.

D'après 1e), Z et U sont indépendantes (car $\bar{X}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$ le sont)

donc $\frac{Z}{\sqrt{U/(n-1)}} \sim \mathcal{T}(n-1)$

$$\frac{Z}{\sqrt{U/(n-1)}} = \frac{\frac{\sqrt{n} \bar{X}_n}{\sigma}}{\sqrt{\frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{(n-1)\sigma^2}}} = \frac{\sqrt{n} \bar{X}_n}{\hat{\sigma}_n} = \frac{\bar{X}_n}{\hat{\sigma}_n / \sqrt{n}}$$

2) • Enoncer (avec des mots) H_0 et H_1 .

Ici: l'incertitude de mesure du nouvel instrument est-elle différente de celle de l'ancien appareil?

• Formalisation mathématique: on suppose que les mesures X_i sont des gaussiennes iid $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ, σ^2 inconnus.
 $\hookrightarrow$... et σ l'incertitude de mesure (= l'écart-type) du précédent appareil.

gaussiennes iid $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ, σ^2 inconnus.

On note σ_0 l'incertitude de mesure (= l'écart-type) du précédent appareil.

$$H_0: \sigma = \sigma_0$$

$$H_1: \sigma \neq \sigma_0.$$

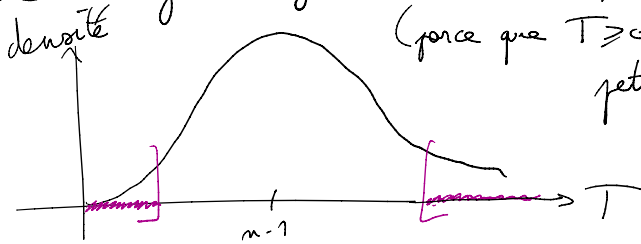
- Statistique de test et sa loi sous H_0 . On fournit $\hat{\sigma}_n$ donc on cherche une statistique de test fondée sur $\hat{\sigma}_n$.

D'après 1d, on connaît la loi de $(n-1)\hat{\sigma}_n^2$ sous H_0 : $T = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_n^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$ sous H_0 .

- Forme de la région de rejet.

$$R =]-\infty, s] \cup [t, +\infty[$$

(parce que $T \geq 0$ et pas d'a priori entre des grandes et des petites valeurs sous H_1)



- Bornes de la région de rejet et niveau: on veut $P_{H_0}(T \in R) \leq 5\%$.

$$P_{H_0}(T \in R) = P_{T \sim \chi^2(n-1)}(T \leq s) + P_{T \sim \chi^2(n-1)}(T \geq t)$$

prenons s le quantile d'ordre 35% de $\chi^2(n-1)$, alors $P_{T \sim \chi^2(n-1)}(T \leq s) = 35\%$

prenons t ————— 97,5% ————— $P_{T \sim \chi^2(n-1)}(T \geq t) = 25\%$

D'après le tableau (comme $n-1=35$) on prend

$$R = [0.734] \cup [284; +\infty[$$

- Conclusion du test: $T^{\text{obs}} = 99 \times \frac{112^2}{97^2} \approx 234 \in R$: on rejette H_0 .

Donc on peut conclure avec un test de niveau 5% que l'incertitude de mesure du nouvel appareil est différente de l'incertitude de mesure de l'ancien.