# TD n°7 : propriétés des semi-groupes et équation de Schrödinger non-linéaire

**Exercice 1 : semi-groupe dérivable**

Soient $S$ un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach $X$, et $A$ son générateur infinitésimal. Étant donné $t_0 \geq 0$, on suppose que $S'(t_0) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=t_0} S(t)$ définit un opérateur dans $\mathcal{L}(X)$.

1. Pour tout $x$ dans $X$, montrer que $S(t_0)x \in D(A)$ et que $S'(t_0) = AS(t_0)$.

2. Pour tout $t \geq t_0$, montrer que $S(t)$ est dérivable.

3. Pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, montrer que $S(t)$ est $n$ fois dérivable pour tout $t \geq nt_0$, et que

$$S^{(n)}(t) = A^n S(t).$$

**Exercice 2 : type d'un semi-groupe**

Soit $S$ un semi-groupe fortement continu sur un espace de Banach $X$. On définit le *type* de $S$ par

$$\omega_0 := \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log\|S(t)\| \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

1. Montrer que

$$\omega_0 = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \log\|S(t)\|.$$

2. Pour tout $\omega > \omega_0$, montrer l'existence de $M_\omega > 0$ tel que

$$\forall t > 0, \quad \|S(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}. \tag{1}$$

**Exercice 3 : théorème de Hille-Yosida**

Soient $S$ un semi-groupe fortement continu sur un $\mathbb{C}$-espace de Banach $X$, et $A$ son générateur infinitésimal. L'*ensemble résolvant* $\rho(A)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que l'opérateur $A_\lambda := \lambda - \mathrm{Id}$ a un inverse borné $R(\lambda, A)$ ($\rho(A)$ est le complémentaire du spectre de $A$). $R(\lambda, A)$ est la *résolvante de $A$ en $\lambda$*. On suppose $S$ de type fini, et soit $(M, \omega)$ vérifiant (1).

1. Montrer que $C_\omega := \{\lambda \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$, et que

$$\forall \lambda \in C_\omega, \forall y \in X, \quad R(\lambda, A)y = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t)y \ \mathrm{d}t.$$

2. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in C_\omega, \forall y \in X, \quad \|R^k(\lambda, A)\| \leq M(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^{-k}. \tag{2}$$

Réciproquement, soit $A$ un opérateur non-borné à domaine dense, tel qu'il existe $(M, \omega)$ satisfaisant, $C_\omega \subset \rho(A)$ et (2).

3. Pour $n > \omega$, on considère les approximations de Yosida de $A$

$$A_n := AJ_n, \quad \text{où } J_n := nR(n, A).$$

Déterminer les limites $n \to +\infty$ de $J_n$ et $A_n$.

4. On pose $S_n(t) := e^{tA_n}$. Montrer que pour $n > 2\omega$,

$$\forall t > 0, \quad \|S_n(t)\| \leq Me^{2\omega t}.$$

5. Pour tout $x$ dans $X$, montrer que $S_n(t)x$ converge vers un certain $S(t)x$ lorsque $n \to +\infty$. [Indication : On pourra montrer que la suite est de Cauchy.]

6. Pour tout $x$ dans $D(A)$, montrer que $t \mapsto S(t)x$ est différentiable.

7. Montrer que $A$ est le générateur infinitésimal de $S$.

La suite de ce TD est consacrée à l'équation de Schrödinger non linéaire

$$\text{(NLS)} \qquad \begin{aligned} i\partial_t u + \Delta u = \kappa u|u|^\alpha \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u_{|t=0} = u_0, \end{aligned}$$

où $\kappa \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. Le but est de prouver le résultat suivant :

**Théorème 3.1.** *Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$.*

- *Théorie $L^2$ sous-critique : on suppose $\alpha < 4/N$. Alors il existe $T > 0$, qui ne dépend que de $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, tel que* (NLS) *admet une unique solution $u \in L^p([-T,T], L^q(\mathbb{R}^N))$ pour tout couple $(p,q) \in [2,+\infty]^2$ tel que*

$$\text{(3)} \qquad \frac{2}{p} + \frac{N}{q} = \frac{N}{2}, \quad p > 2.$$

  *De plus cette solution est dans $\mathcal{C}(]-T,T[, L^2(\mathbb{R}^N))$.*
- *Théorie $L^2$ critique : on suppose $\alpha = 4/N$. Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que si $\|u_0\|_{L^2} \leq C_0$, alors* (NLS) *admet une unique solution globale $u \in L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^N))$ pour tout couple admissible $(p,q)$ vérifiant* (3)*. De plus $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$.*

On rappelle l'équation de Schrödinger linéaire non homogène

$$\text{(LSNH)} \qquad \begin{aligned} i\partial_t u + \Delta u = f \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u_{|t=0} = u_0, \end{aligned}$$

où $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, et $f$ est un terme source dont la régularité sera précisée au cours du problème. Plusieurs résultats de cours sont rappelés en Appendice.

**Exercice 4 : Invariance d'échelle**

1. Soit $\lambda > 0$ et soit $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$ une solution de (NLS) au sens des distributions. On pose

$$u_\lambda : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \mapsto \lambda^{2/\alpha} u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

Montrer que $u_\lambda$ est solution de (NLS).

2. Montrer que

$$\|\lambda^{2/\alpha} u_0(\lambda \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \lambda^{\frac{2}{\alpha} - \frac{N}{2}} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

3. Montrer que si $(p,q)$ vérifie (3)

$$\|u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}^N)} = \lambda^{\frac{2}{\alpha} - \frac{N}{2}} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}^N)}.$$

En déduire que si $\alpha = 4/N$, l'espace $L^p(\mathbb{R}), L^q(\mathbb{R}^N)$ est invariant par le changement d'échelle $u \to u_\lambda$.

**Exercice 5 : estimation du terme non-linéaire**

Pour $T > 0$, on définit l'espace

$$S_T^0 = \bigcap_{(p,q) \text{ vérifiant } (3)} L^p([-T,T], L^q(\mathbb{R}^N)).$$

1. Soit $u \in S_T^0$. On pose $f = \kappa u|u|^\alpha$. Soit $(\bar{p}, \bar{q})$ vérifiant (3). Montrer que

$$\|f\|_{L^{\bar{p}'}([-T,T],L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))} = |\kappa| \|u\|^{\alpha+1}_{L^{(\alpha+1)\bar{p}'}([-T,T],L^{(\alpha+1)\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))}.$$

2. On va chercher à trouver $(\bar{p}, \bar{q})$, $(p_1, q_1)$, $(p_2, q_2)$ admissibles tels que l'on puisse interpoler $L^{(\alpha+1)\bar{p}'}([-T,T], L^{(\alpha+1)\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))$ entre $L^{p_1}([-T,T], L^{q_1}(\mathbb{R}^N))$ et $L^{p_2}([-T,T], L^{q_2}(\mathbb{R}^N))$.

a) On suppose que

$$(4) \qquad \frac{1}{q_1} + \frac{\alpha}{q_2} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

et on pose $\frac{1}{\bar{q}'} = \frac{1}{q_1} + \frac{a}{q_2}$ (avec donc $\bar{q} \geq 2$.) Montrer que pour presque tout $t \in [-T,T]$,

$$\|u(t)\|_{L^{(\alpha+1)\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))} \leq \|u(t)\|^{\frac{1}{\alpha+1}}_{L^{q_1}(\mathbb{R}^N)} \|u(t)\|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}_{L^{q_2}(\mathbb{R}^N)}$$

b) Montrer que si $a \in [0, 4/N]$, il existe $\theta \in [0,1]$, avec $\theta = 0$ si et seulement si $a = 4/N$, tel que

$$\theta + \frac{1}{p_1} + \frac{a}{p_2} = \frac{1}{\bar{p}'}.$$

c) En déduire que si (4) est vérifiée et que $a \in [0, 4/N]$,

$$\|f\|_{L^{\bar{p}'}([-T,T],L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))} \leq |\kappa| T^\theta \|u\|_{L^{p_1}([-T,T],L^{q_1}(\mathbb{R}^N))} \|u\|^\alpha_{L^{p_2}([-T,T],L^{q_2}(\mathbb{R}^N))}.$$

3. Soit $u, v \in S_T^0$. On pose $f = \kappa u|u|^\alpha$, $g = \kappa v|v|^\alpha$.
Montrer qu'il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que

$$|f - g| \leq C_\alpha |\kappa| |u - v| \left(|u|^\alpha + |v|^\alpha\right).$$

4. En utilisant le même type de calculs et les mêmes notations que précédemment, montrer que

$$\begin{aligned}\|f - g\|&_{L^{\bar{p}'}([-T,T],L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))} \\ &\leq |\kappa| T^\theta \|u - v\|^{\frac{1}{\alpha+1}}_{L^{p_1}([-T,T],L^{q_1}(\mathbb{R}^N))} \left(\|u\|^\alpha_{L^{p_2}([-T,T],L^{q_2}(\mathbb{R}^N))} + \|v\|^\alpha_{L^{p_2}([-T,T],L^{q_2}(\mathbb{R}^N))}\right).\end{aligned}$$

**Exercice 6 : point fixe**

Soit $(p, q) \in [2, +\infty]$ vérifiant (3) et tel que $0 < \alpha/q < 1/2$. Soit $T > 0$ quelconque. On pose

$$X_T = L^p([-T,T], L^q(\mathbb{R}^N)) \cap L^\infty([-T,T], L^2(\mathbb{R}^N)),$$

muni de la norme

$$\|u\|_{X_T} = \|u\|_{L^p([-T,T],L^q(\mathbb{R}^N))} + \|u\|_{L^\infty([-T,T],L^2(\mathbb{R}^N))}.$$

Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ quelconque. On suppose que $\alpha \in [0, 4/N]$.

1. On considère l'application

$$\Phi : u \in X_T \mapsto v \in X_T,$$

où $v$ est solution de (LSNH) avec $f = \kappa u|u|^\alpha$, i.e.

$$v(t) = e^{it\Delta} u_0 + \kappa \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} \left(u(s)|u(s)|^\alpha\right) ds.$$

Montrer que $\Phi$ est bien définie.

2. Montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ ne dépendant que de $\alpha, p$ et $q$, et $\theta \geq 0$, avec $\theta = 0$ si et seulement si $\alpha = 4/N$, tel que pour tout $u \in X_T$,

$$\|\Phi(u)\|_{X_T} \leq C_1 \left( \|u_0\|_{X_T} + T^\theta \|u\|_{X_T}^{1+\alpha} \right).$$

3. Montrer qu'il existe une constante $C_2 > 0$ telle que pour tout $u_1, u_2 \in X_T$,

$$\|\Phi(u_1) - \Phi(u_2)\|_{X_T} \leq C_2 T^\theta \|u_1 - u_2\|_{X-T} \left( \|u_1\|_{X_T}^\alpha + \|u_2\|_{X_T}^\alpha \right)$$

4. On suppose dans cette question que $\alpha < 4/N$ (de sorte que $\theta > 0$), et on prend $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ quelconque. On définit la boule

$$B = \{u \in X_T, \quad \|u\|_{X_T} \leq 2C_1 \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\}.$$

a) Montrer qu'il existe $T_1 > 0$ tel que si $T \leq T_1$, la boule $B$ est stable par $\Phi$.
b) Montrer qu'il existe $T_2 > 0$ tel que si $T < T_2$, l'application $\Phi$ est contractante sur $B$.
On explicitera les dépendances de $T_1$ et de $T_2$ en fonction de $\|u_0\|_{L^2}$.
c) En déduire que si $T < \min(T_1, T_2)$, $\Phi$ admet un unique point fixe sur $B$. Conclure.

5. On suppose dans cette question que $\alpha = 4/N$ (et donc $\theta = 0$.) On pose, pour $\delta > 0$,

$$B_\delta = \{u \in X_T, \quad \|u\|_{X_T} \leq \delta\},$$

et on suppose que $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C_0$.
a) On suppose que

$$C_1 \left( C_0 + \delta^{1+\alpha} \right) \leq \delta, 2C_2\delta^\alpha < 1. \tag{5}$$

Montrer que $B_\delta$ est stable par $\Phi$ et que $\Phi$ est une contraction sur $B_\delta$.
b) Montrer qu'il existe des constantes $C_0, \delta > 0$ qui vérifient (5).
c) Conclure.

# Appendice

On rappelle les résultats suivants :

— Pour tout $p \in [1, 2]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\left\| e^{it\Delta} f \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{(4\pi|t|)^{N\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

— Inégalités de Strichartz : pour tout $(p, q) \in [2, +\infty]^2$ tels que

$$\frac{2}{p} + \frac{N}{q} = \frac{N}{2}, \quad p > 2 \tag{6}$$

il existe une constante $C_{p,q} > 0$ telle que pour toute fonction $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\left\| e^{it\Delta} u_0 \right\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(\mathbb{R}^N))} \leq C_{p,q} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

— Inégalités de Strichartz pour le terme source :

**Proposition 6.1.** *Soit $(p, q), (\bar{p}, \bar{q}) \in [2, +\infty]^2$ deux couples d'exposants admissibles, i.e.*

$$\frac{2}{p} + \frac{N}{q} = \frac{2}{\bar{p}} + \frac{N}{\bar{q}} = \frac{N}{2}, \quad p > 2, \ \bar{p} > 2.$$

*Il existe une constante $C_{p,q,\bar{p},\bar{q}} > 0$ telle que pour tout $T > 0$, pour tout $f \in L^{\bar{p}'}([0, T], L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))$*

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s) ds \right\|_{L^p([0,T], L^q(\mathbb{R}^N))} \leq C_{p,q,\bar{p},\bar{q}} \|f\|_{L^{\bar{p}'}([0,T], L^{\bar{q}'}(\mathbb{R}^N))}.$$