TD n^{o}6 : Équation de Schrödinger et semi-groupes

Exercice 1 : cas linéaire homogène
On s'intéresse à l'équation de Schrödinger linéaire homogène :

$$(1) \qquad \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = f \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u_{|t=0} = u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \end{cases}$$

où $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ quelconque avec $\Re(\alpha) > 0$.
1. On considère l'application

$$f_\alpha^0 : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \exp(-\alpha\xi^2 - ix\xi)\ d\xi.$$

Justifier que f_α^0 est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f_\alpha^0)'(x) = -\frac{x}{2\alpha} f_\alpha^0(x)$. En déduire qu'il existe une constante C telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\alpha^0(x) = C \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha}\right).$$

3. On cherche à présent à calculer la constante $C = f_\alpha^0(0)$.
a) Justifier que

$$(f_\alpha^0(0))^2 = \int_{\mathbb{R}^2} \exp(-\alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2))\ d\xi_1\ d\xi_2.$$

b) En utilisant un changement de variables en coordonnées polaires, montrer que

$$(f_\alpha^0(0))^2 = \frac{\pi}{\alpha}.$$

c) En déduire que

$$f_\alpha^0(0) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

où $\sqrt{\alpha} = \sqrt{|\alpha|}\exp(i\arg(\alpha)/2)$ et $\arg(\alpha) \in]-\pi/2, \pi/2[$.
d) On considère à présent l'application

$$f_\alpha : x = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} \exp(-\alpha|\xi|^2 - ix\cdot\xi)\ d\xi.$$

Montrer que f_α est bien définie et que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$f_\alpha(x) = \Pi_{i=1}^N f_\alpha^0(x_i).$$

En déduire que

$$f_\alpha(x) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4\alpha}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

4. Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \in \mathbb{R}^N$, on définit, avec la convention $\sqrt{\pm i} = e^{\pm i\pi/4}$,

$$K(t,x) = \frac{1}{(4i\pi t)^{N/2}} \exp\left(\frac{i|x|^2}{4t}\right)$$

a) Justifier que pour tout $t \neq 0$, $K(t,\cdot) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

b) Pour tout $\epsilon > 0$, on pose $K_\epsilon(t,x) = K(t,x)\exp(-\epsilon|x|^2)$. Montrer que $K_\epsilon(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $\epsilon > 0, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et que $K_\epsilon(t) \rightharpoonup K(t)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ quand $\epsilon \to 0$.
c) En déduire que
$$\hat{K}(t,\xi) = \exp(-it|\xi|^2).$$

5. On suppose que (1) admet une solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,
$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)\exp(-it|\xi|^2) = \hat{K}(t,\xi)\hat{u}_0(\xi).$$

En déduire que
$$u(t) = K(t,\cdot) *_x u_0.$$

6. Réciproquement, pour $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose $u(t) = K(t,\cdot) *_x u_0$ (avec la convention $K(t=0) = \delta$).
a) Montrer que $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ et que $\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)\exp(-it|\xi|^2)$.
b) Montrer que u est solution de (1).

Notation. Pour $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, il a été montré en cours que (1) admet une unique solution faible $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$, donnée par
$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{-it|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)\right).$$

On note $S(t)$ ou $e^{it\Delta}$ l'opérateur linéaire associé à (1). Autrement dit, $S(t) : u_0 \mapsto u(t)$, où u est solution de (1).

Exercice 2 : cas linéaire inhomogène
On s'intéresse à l'équation de Schrödinger linéaire non homogène
$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = f \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u_{|t=0} = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

où $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, et f est un terme source dont la régularité sera précisée.
1. On suppose que $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ et que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$. On considère la **formule de Duhamel**,
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = e^{it\Delta}u_0 + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} f(s)\,ds. \tag{3}$$

a) Montrer que la fonction u définie par (3) appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$.
b) Montrer que u est solution de (2).
2. Soient $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ deux solutions de (2). Montrer que $u = v$.
3. On suppose à présent que $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$. On dit que $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$ est solution faible de (2) si pour tout $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ et tout $T \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} \langle u(T), \phi(T)\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} &= \langle u_0, \phi(0)\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} + \int_0^T \langle u(t), \partial_t\phi(t) - i\Delta\phi(t)\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\,dt \\ &\quad -i\int_0^T \langle f(t), \phi(t)\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}\,dt. \end{aligned}$$

Montrer qu'il existe une solution faible $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$ de (2).
4. Unicité : soit $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$ une solution faible de (1) telle que $u_0 = 0$.
a) Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, et soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{R}^N))$ définie par
$$\varphi(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{i(t-T)|\xi|^2}\hat{\psi}(\xi)\right).$$

Vérifier que φ est solution de $\partial_t \varphi + i\Delta\varphi = 0$, $\varphi_{t=T} = \psi$.
b) En déduire que $\langle u(T), \psi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = 0$. Conclure.

Exercice 3 : autour de la notion de semi-groupe

Soit X un espace de Banach, et $\mathcal{L}(X)$ l'algèbre des applications linéaires continues $T : X \to X$. Un *opérateur linéaire (non-borné)* A de domaine $D(A)$ est une application linéaire $A : D(A) \to X$, $D(A)$ étant un sous-espace vectoriel de X. On considère une application $S : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(X)$ telle que

$$\begin{cases} S(0) = \mathrm{Id}, \\ \forall t, s \geq 0, \quad S(t+s) = S(t)S(s), \\ \text{Pour tout } x \in X,\ t \mapsto S(t)x \text{ is continuous.} \end{cases}$$

Une telle application définit un *semi-groupe fortement continu* $(S(t))_{t\geq 0}$. À un tel semi-groupe est associé son *générateur infinitésimal* A, défini comme l'opérateur non-borné tel que

$$\begin{cases} \forall x \in D(A), \quad Ax = \lim_{h\downarrow 0^+} h^{-1}\big[S(h)x - x\big], \\ D(A) = \{x \in X \text{ tel que la limite ci-dessus existe}\}. \end{cases}$$

1. Donner des exemples de (semi-)groupe fortement continu.
2. On suppose que $D(A) = X$ et que A est borné. Montrer que pour tout x dans X,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x, \end{cases}$$

admet une unique solution dans $C^1(\mathbb{R}_+, X)$ et expliciter $S(t)$.
3. On revient au cas général A non-borné. Montrer que $D(A)$ est dense dans X.
4. Pour tout x dans $D(A)$, montrer que $t \mapsto S(t)x$ est dans $C^1(\mathbb{R}_+, X) \cap C(\mathbb{R}_+, D(A))$, et que

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{d}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax.$$

5. Montrer que le graphe de A est fermé dans $X \times X$. On dit que A *est fermé*.
6. Pour tout x dans $D(A)$, montrer que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) = Ax(t), \\ x(0) = x, \end{cases}$$

admet une unique solution dans $C^1(\mathbb{R}_+, X) \cap C(\mathbb{R}_+, D(A))$.