# TD n°4 : Équations elliptiques et paraboliques

**Exercice 1 : lemme de Lions-Magenes**

Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{H}$ deux espaces de Hilbert séparables, avec injections continues et denses $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}'$, $\mathcal{V}'$ étant le dual de $\mathcal{V}$. On suppose que ces injections permettent d'écrire

$$\forall f \in \mathcal{H}, \quad \forall v \in \mathcal{V}, \quad \langle f, v \rangle_{\mathcal{V}' \times \mathcal{V}} = (v|f)_{\mathcal{H}}.$$

Soit $u$ dans $L^2([0,T];\mathcal{V})$, admettant une dérivée faibles $\partial_t u$ (contre des fonctions test $\varphi \in C^\infty([0,T],\mathbb{R})$) dans $L^2([0,T];\mathcal{V}')$. Montrer que $u$ est dans $C^0([0,T];\mathcal{H})$, et que :

- Pour tout $v \in \mathcal{V}$, on a au sens des distributions (i.e. contre toute fonction test)

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}(u(t)|v)_{\mathcal{H}} = \langle \partial_t u, v \rangle.$$

- Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^\infty([0,T];\mathcal{H})} \leq C\big(\|u\|_{L^2([0,T];\mathcal{V})} + \|\partial_t u\|_{L^2([0,T];\mathcal{V}')}\big).$$

[Indication : on pourra approcher $u$ par une suite régularisante, et montrer que cette suite est de Cauchy dans $C([0,T],\mathcal{H})$.]

**Exercice 2 : lemme d'Aubin-Lions**

Soient $X$, $Y$ et $Z$ trois espaces de Banach, avec injections continues $X \hookrightarrow Y \hookrightarrow Z$. On suppose que $X$ et $Z$ sont réflexifs, et que l'injection $X \hookrightarrow Y$ est compacte. Étant donnés $1 < p, q < \infty$, soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions uniformément bornée dans $L^p([0,T];X)$, admettant des dérivées faibles $(\partial_t u_n)_n$ (contre des fonctions test $\varphi \in C^\infty([0,T],\mathbb{R})$) uniformément bornée dans $L^q([0,T];Z)$. On souhaite montrer qu'il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ qui converge fortement dans $L^p([0,T];Y)$. *On admettra que :*

- *$L^p([0,T];X)$ et $L^q([0,T];Z)$ héritent respectivement de la réflexivité de $X$ et $Z$.*
- *$(u_n)_n$ est uniformément bornée dans $C([0,T],Y)$ (comme à l'exercice précédent).*

1. *(Lemme d'Ehrling)* Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon$ telle que

$$\|u\|_Y \leq \varepsilon \|u\|_X + C_\varepsilon \|u\|_Z.$$

2. Justifier qu'il suffit de démontrer que si $u_n$ tend faiblement vers 0 dans $L^2([0,T];X)$ et $\partial_t u_n$ tend faiblement vers 0 dans $L^p([0,T];Z)$, alors pour tout $t_0 \in [0,T]$, $u_n(t_0)$ tend fortement vers 0 dans $Z$.

3. Étant donné $t_0$ dans $[0,T]$, montrer que

$$\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} (t_1 - t') \partial_{t'} u_n(t') \, \mathrm{d}t'$$

tend fortement vers 0 dans $Z$ quand $t_1$ tend vers $t_0$, puis que $\frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} u_n(t') \, \mathrm{d}t'$ tend faiblement vers 0 dans $X$. Conclure.

**Exercice 3 : inégalité de Caccioppoli généralisée**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $A = (a_{ij}(x)) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))$ une fonction à valeurs matricielles et $\alpha > 0$ tels que :

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \qquad \alpha |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j.$$

Soient $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ et $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. On considère l'opérateur linéaire défini par :

$$\begin{aligned} Lu &= -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) + b(x).\nabla u + c(x)u \\ &= -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\partial_{x_i}u + c(x)u. \end{aligned}$$

Soient $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$ telles que $Lu = f$ au sens des distributions. Soit $\Omega' \subset \Omega$ un ouvert borné tel que $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Montrer que :

$$\int_{\Omega'} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leq C \int_{\Omega} (u^2 + f^2) \mathrm{d}x.$$

[Indication : on pourra utiliser comme fonction test $\eta^2 u$ où $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et vaut 1 sur $\Omega'$.]

**Exercice 4 : inégalité de Poincaré-Wirtinger et diffusion 1D**

1. Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ qui est $T$-périodique. Montrer que si $\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t = 0$ alors

$$\left(\int_0^T |u(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leq \frac{T}{2\pi}\left(\int_0^T |u'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

[Indication : utiliser une décomposition en séries de Fourier.]

2. Soit $u = u(t,x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $2\pi$-périodique en $x$, et solution de l'équation de diffusion

$$\partial_t u - \partial_x(\gamma(x)\partial_x u) = 0,$$

où $\gamma$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$, $2\pi$-périodique et minorée par une constante strictement positive. Montrer que si la moyenne $\int_{-\pi}^{\pi} u(0,x)\,\mathrm{d}x$ s'annule, alors il existe une constante $C$ telle que, pour tout temps $t \geq 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(t,x)^2\,\mathrm{d}x \leq e^{-tC}\int_{-\pi}^{\pi} u(0,x)^2\,\mathrm{d}x.$$

**Exercice 5 : principe du maximum fort pour l'équation de la chaleur**

Soient $\Omega$ un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $T > 0$. On note $\Omega_T = (0,T] \times \Omega$.

1. Dans cette première question, on va démontrer une formule de la moyenne pour l'équation de la chaleur. On introduit la fonction $\Phi$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ par

$$\Phi(t,x) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

puis l'ensemble $E(t,x;r)$ pour $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ défini par

$$E(t,x;r) = \left\{(s,y) \in \mathbb{R}^{n+1};\ s \leq t,\ \Phi(t-s, x-y) \geq 1/r^n\right\}.$$

a) On fixe $(t,x) \in \Omega_T$ et on pose

$$\phi(r) = \frac{1}{r^n} \iint_{E(t,x;r)} u(s,y)\,\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$$

pour $r > 0$ assez petit pour que $E(t,x;r) \subset \Omega_T$. On suppose que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega_T)$ est solution de l'équation de la chaleur sur $\Omega_T$ (i.e. vérifie $\partial_t u = \Delta u$ sur $\Omega_T$). Montrer que $\phi$ est constante.

[Indication : on pourra utiliser la fonction $\psi$ définie par $\psi(s,y) = -n/2\ln(-4\pi s) + |y|^2/4s + n\ln(r)$.]
b) En admettant que

$$\iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s = 4,$$

montrer que si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega_T)$ est solution de l'équation de la chaleur sur $\Omega_T$, alors

$$u(t,x) = \frac{1}{4r^n}\iint_{E(t,x;r)} u(s,y)\,\frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s$$

pour tout $E(t,x;r) \subset \Omega_T$.
2. Montrer que si $\Omega$ est convexe et qu'il existe un point $(t_0,x_0) \in \Omega_T$ tel que

$$u(t_0,x_0) = \max_{\overline{\Omega}_T} u$$

alors $u$ est constante sur $\Omega_{t_0}$.

**Exercice 6 : une équation de diffusion semi-linéaire**
Soit $\Omega$ un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $T>0$. On considère l'équation

$$\partial_t u - \Delta u + f(u) = 0\,,\quad f(u) = \sum_{k=0}^{2p-1} c_k u^k\,,\; c_{2p-1} > 0\,,\; p \geq 1\,,$$

avec $u_{|\partial\Omega} = 0$ et $u_{|t=0} = u_0$. On veut montrer que pour tout $u_0 \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2([0,T];H^1_0(\Omega)) \cap L^{2p}([0,T]\times\Omega)$.
1. Désignant par $E_N$ l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les $N$ premiers vecteurs propres du Laplacien dans $H^1_0 \cap L^{2p}(\Omega)$ ($P_N$ est la projection orthogonale associée), montrer qu'il existe une unique solution $u_N$ (approximation de Galerkin de $u$) de

$$\partial_t u_N - \Delta u_N = P_N f(u_N)$$

dans $\mathcal{C}([0,T];E_N)$ et qu'il existe deux constantes $c, C > 0$ telles que

$$\frac{1}{2}\sup_{[0,T]}\|u_N(t)\|^2_{L^2} + \int_0^T \|\nabla u_N(t')\|^2_{L^2}\,\mathrm{d}t' + c\int_0^T \|u_N(t')\|^{2p}_{L^{2p}}\,\mathrm{d}t' \leq CT + \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2}\,.$$

2. En déduire qu'il existe $u \in L^\infty([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2([0,T];H^1_0(\Omega)) \cap L^{2p}([0,T]\times\Omega)$ limite faible de $u_N$ et que $\partial_t u \in L^2([0,T];H^{-1}(\Omega)) + L^q([0,T]\times\Omega)$ où $q$ est l'exposant de Hölder conjugué de $2p$.
3. Utiliser les exercices 1 et 2 pour montrer que $(f(u_N(t))|v) \to (f(u(t))|v)$ presque partout sur $[0,T]$, pour tout $v \in H^1_0 \cap L^{2p}(\Omega)$, et conclure.

**Exercice 7 : un résultat d'explosion en temps fini**
Sur $\mathbb{R}^+ \times (0,1)$ on considère

$$\partial_t u - \Delta u = u^3\,,$$

avec $u_{|x=0} = u_{|x=1} = 0$ et $u_{|t=0} = u_0$. Soit

$$c(t) := \int_0 u(t,x)\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x\,.$$

1. Montrer que

$$c'(t) \geq -\pi^2 c(t) + \frac{c^3}{4}\cdot$$

2. On suppose que $c(0) > 2$. En utilisant le fait que la solution de l'EDO

$$y'(t) = -\pi^2 y(t) + \frac{y^3}{4}$$

s'écrit

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{1 - e^{2\pi^2(t-t_*)}}}\,,$$

montrer que

$$c(t) \to \infty \quad \text{lorsque} \quad t \to t_* := \frac{1}{\pi^2} \log \frac{c(0)}{\sqrt{c^2(0) - 4}}\,.$$