TD n^{o}1 : de Fourier à Sobolev

Pour $p \geq 1$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on rappelle la définition de l'espace de Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ f \in L^p(\Omega) : \forall\, i = 1, \dots, n,\ \exists\, g_i \in L^p(\Omega),\ \int_\Omega f\,\partial_i \varphi = -\int_\Omega g_i\,\varphi,\ \forall\,\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega), \right\}.$$

La fonction $g_i =: \partial_i f$ est alors uniquement définie dans $L^p(\Omega)$: c'est la i-ème dérivée partielle de f *au sens des distributions*. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est de Banach pour la norme $\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|f\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i f\|_{L^p(\Omega)}$. On définit alors inductivement les espaces de Banach

$$W^{m+1,p}(\Omega) := \left\{ f \in W^{1,p}(\Omega) : \forall\, i = 1, \dots, n,\ \partial_i f \in W^{m,p}(\Omega) \right\},$$

munis des normes $\|f\|_{W^{m+1,p}(\Omega)} := \|f\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i f\|_{W^{m,p}(\Omega)}$. Pour $p = 2$, $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Exercice 1 : espaces de Sobolev sur un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. L'espace de Sobolev homogène $W^{m,p}_0(\Omega)$ est défini comme l'adhérence dans $W^{m,p}(\Omega)$ de $C^\infty_c(\Omega)$.

1. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $v \in C^1_b(\Omega)$ (i.e. v et ses dérivées sont bornées sur Ω). Montrer que $uv \in W^{1,p}(\Omega)$ et les dérivées au sens faible vérifient

$$\forall\, i = 1, \dots, n, \quad \partial_i(uv) = (\partial_i u)v + u(\partial_i v).$$

2. Montrer que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\eta \in C^1_c(\Omega)$ alors $\eta u \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

3. Montrer que pour $1 \leq p \leq p' < \infty$, $W^{1,p'}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $W^{1,p}(\Omega)$.

4. Soit $G \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction à dérivée bornée. Montrer que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ alors $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ et que, au sens des distributions,

$$\nabla(G \circ u) = (G' \circ u)\nabla u.$$

5. Soit Ω' un ouvert de $\mathbb{R}^d$ relativement compact dans Ω, et $\delta := \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$. Pour h dans $\mathbb{R}^n$, soit τ_h l'opérateur de translation par h. Étant donnée f dans $L^p(\Omega)$, $p > 1$, montrer que

$$f \in W^{1,p}(\Omega') \Leftrightarrow \sup_{0 < |h| \leq \delta} |h|^{-1} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\Omega')} < \infty.$$

Exercice 2 : florilège d'équations

1. Étant donné un réel h, trouver tous les f dans $L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x+h).$$

2. Étant donné f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, montrer qu'il existe une unique fonction u dans $H^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $u - \Delta u = f$ presque partout.

3. Vérifier que pour tout entier $d \geq 3$, la distribution

$$E_d(x) := \frac{1}{(d-2)|\mathbb{S}^{d-1}||x|^{d-2}}$$

est une solution fondamentale du Laplacien. Proposer un candidat pour E_2.

Exercice 3 : une définition alternative de H^s

On rappelle que l'espace de Schwartz $\mathcal{S}$ est défini comme l'espace des fonctions f de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que pour tout d dans $\mathbb{N}$ et tout α dans $\mathbb{N}^d$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|^2)^{d/2}\partial^\alpha f(x)\right| < \infty\,.$$

Pour s réel, on introduit les quantités

$$\|f\|_{H^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_{\dot{H}^s} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}\,|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}\,,$$

et les espaces correspondant H^s et $\dot{H}^s$ de distributions tempérées f, définis en imposant que $\widehat{f}$ soit une fonction mesurable telle que $\|f\|_{H^s}$ et $\|f\|_{\dot{H}^s}$ soient respectivement finies.

1. Montrer que H^s est un espace de Hilbert, et que $\dot{H}^s$ en est un si et seulement si $s < d/2$.

2. En considérant le produit scalaire avec les translatées d'une gaussienne, montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est inclus et dense dans H^s.

3. À l'aide de fonctions plateau, montrer que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $W^{m,2}(\mathbb{R}^d)$.

4. Lorsque $s = m \geq 1$ est un entier, montrer que les normes de H^m et $W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ sont équivalentes sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En déduire $H^m = W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 4 : injections de Sobolev

Soit $s \in [0, n/2[$ et $q := 2n/(n-2s)$. De la question 1. à la question 4., on considère f dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f\|_{\dot{H}^s} = 1$.

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$,

$$\|f\|_{L^q}^q = q\int_0^{+\infty} \lambda^{q-1}\,|\{|f| > \lambda\}|d\lambda\,,$$

où $\{|f| > \lambda\}$ est l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |f(x)| > \lambda\}$, et $|\{|f| > \lambda\}|$ la mesure de Lebesgue de cet ensemble.

2. Soit $A_\lambda > 0$ une constante qui dépend de λ. Pour tout $\lambda > 0$, on décompose f sous la forme $f = f_\lambda^\flat + f_\lambda^\sharp$ (décomposition des hautes et basses fréquences) où $f_\lambda^\flat$ et $f_\lambda^\sharp$ sont définies par :

$$\begin{aligned}
\widehat{f_\lambda^\flat}(\xi) &= \widehat{f}(\xi) \quad \text{si} \quad |\xi| \leq A_\lambda, &\qquad \widehat{f_\lambda^\flat}(\xi) &= 0 \quad \text{si} \quad |\xi| > A_\lambda\,,\\
\widehat{f_\lambda^\sharp}(\xi) &= 0 \quad \text{si} \quad |\xi| \leq A_\lambda, &\qquad \widehat{f_\lambda^\sharp}(\xi) &= \widehat{f}(\xi) \quad \text{si} \quad |\xi| > A_\lambda\,.
\end{aligned}$$

Déterminer A_λ de sorte que $\left\{|f_\lambda^\flat| > \lambda/2\right\} = \emptyset$.

[Indication : on pourra montrer que $\|f_\lambda^\flat\|_\infty \leq C_1(s,n)A_\lambda^{\frac{n}{2}-s}$ où $C_1(s,n)$ est une constante strictement positive dépendant uniquement de n et de s.]

3. Pour le A_λ défini à la question précédente, montrer que

$$\|f\|_{L^q}^q \leq 4q\int_0^{+\infty} \lambda^{q-3}\,\|f_\lambda^\sharp\|_2^2\,d\lambda\,.$$

4. Montrer que

$$\|f\|_{L^q} \leq C\,,$$

où C est une constante positive.

5. Montrer que l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout p tel que $2 \leq p \leq 2n/(n-2s)$.

6. Soit $p > 2$ et $s \geq s_p := n(1/2 - 1/p)$. Prouver qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in H^s$,

$$\|f\|_{L^p} \leq C \, \|f\|_{L^2}^{1-\theta} \, \|f\|_{\dot{H}^s}^{\theta} \quad \text{avec} \quad \theta = s_p/s \, .$$

Exercice 5 : opérateurs linéaires équivariants par translation

Un opérateur linéaire T sur un espace de fonctions est dit équivariant par translation s'il commute avec toutes les translations τ_h. Cela concerne notamment tous les opérateurs différentiels usuels !

1. Lorsque T est un opérateur linéaire équivariant par translation sur les fonctions $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, montrer que T est une convolution discrète, et que sa matrice dans la base de Fourier $e_k(n) := \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-\frac{2ikn\pi}{N}}$ est diagonale.

2. Lorsque $1 \leq p < \infty$, et que $T : L^p(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$ est linéaire continu équivariant par translation, monter que $T(L^p(\mathbb{R}))$ ne contient que des fonctions uniformément continues.
[Indication : on pourra montrer que f dans $L^\infty(\mathbb{R})$ admet un représentant uniformément continu si et seulement si $\|\tau_h f - f\|_{L^\infty} \to 0$ lorsque $h \to 0$.]

3. En déduire que l'application $L^p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto T(f)(0)$ est bien définie dans le dual de $L^p(\mathbb{R})$.

4. En conclure que T est un opérateur de convolution avec un élément de $L^{p'}(\mathbb{R})$.

5. Par dualité (transposition), montrer qu'un opérateur linéaire continu $L^1(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ en induit un autre $L^{p'}(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$.

6. Déterminer les opérateurs linéaires continus équivariants par translation $L^1(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$, pour $1 < p < \infty$.

Exercice 6 : sur l'image de $L^1(\mathbb{R})$ par la transformée de Fourier

1. Pour $n \geq 1$, montrer l'existence de f_n dans $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f_n} = \mathbb{1}_{[-1,1]} \star \mathbb{1}_{[-n,n]}$. En déduire que $\widehat{f_n} \in L^2 \cap \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $(\widehat{f_n})_{n \geq 1}$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R})$, mais que $(f_n)_{n\geq 1}$ ne l'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

3. En déduire que la transformée de Fourier (TF) est linéaire, continue, injective $L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, mais non surjective.

4. Montrer que l'image de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ par la TF est incluse dans $L^1(\mathbb{R})$, puis que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est inclus dans l'image de $L^1(\mathbb{R})$.

5. À l'aide d'une fonction plateau, conclure que l'image de $L^1(\mathbb{R})$ par la TF est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

À retenir.

- Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ mesurent la régularité d'une fonction. Cette régularité est d'autant plus « importante » (au sens des injections continues) que $\frac{1}{p} - \frac{m}{d}$ est petit - dans le cas négatif, on retrouve même de la régularité Hölder $\mathcal{C}^{k,\alpha}$.
- Dans le cas Hilbert $p = 2$, la transformée de Fourier permet de relier cette régularité au contrôle des hautes fréquences. Elle l'étend aussi aux cas d'exposants factionnaires et des fonctions discrètes. D'autres méthodes d'interpolation sont possibles.
- La convolution est l'expression d'une propriété d'équivariance par translation. En règle générale, la transformée de Fourier est particulièrement adaptée à ce type de situations.
- La notion de régularité exprimée par la décroissance de la transformée de Fourier est globale dans l'espace. Il est possible de la localiser, par exemple en remplaçant la base de Fourier par celle des ondelettes...