Éléments de correction pour le TD n°4

Exercice 1 : lemme de Lions-Magenes

Corrigé dans les détails en classe.

Exercice 2 : lemme d'Aubin-Lions

Corrigé en classe, et une ressource qui le détaille est disponible sur le moodle.

Exercice 3 : inégalité de Caccioppoli généralisée

Laissé en entraînement, analogue au cours. Venir me voir si questions.

Exercice 4 : inégalité de Poincaré-Wirtinger et diffusion 1D

Corrigé en classe.

Exercice 5 : principe du maximum fort pour l'équation de la chaleur

1. a) Dans la suite, on note $E(r) = E(0,0;r)$ pour tout $r > 0$. On commence par remarquer que si $r > 0$ est assez petit alors $E(t,x;r) \subset \Omega_T$. En effet, on peut réécrire l'ensemble $E(t,x;r)$ de la manière suivante :

$$E(t,x;r) = \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}^{n+1},\ t - \frac{r^2}{4\pi} \leq s < t \text{ et } |x-y|^2 \leq 4n(\log r)(t-s) - 2n(t-s)\log(4\pi(t-s)) \right\}.$$

On voit immédiatement que si r est assez petit, $t - \frac{r^2}{4\pi} > 0$. Puis si r est assez petit $\log r \leq 0$ et donc si $(s,y) \in E(t,x;r)$, $|x-y|^2 \leq -2nr^2\log(r^2) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. On en déduit que pour r assez petit, $y \in \Omega$.

Puis par changement de variable, on a :

$$\phi(r) = \frac{1}{r^n} \iint_{E(r)} u(s+t, y+x) \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds = \iint_{E(1)} u(r^2 s + t, ry + x)\, \frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds.$$

On dérive ensuite cette expression et on obtient :

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \iint_{E(1)} \left(2r\partial_s u(r^2 s + t, ry + x)\frac{|y|^2}{s} + \sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(r^2 s + t, ry + x) y_i \frac{|y|^2}{s^2} \right) dy\, ds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(2\partial_s u(s+t, y+x)\frac{|y|^2}{s} + \sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(s+t, y+x) y_i \frac{|y|^2}{s^2} \right) dy\, ds \\
&=: J_1 + J_2,
\end{aligned}$$

où on a de nouveau procédé à un changement de variable pour obtenir la deuxième égalité. Comme indiqué dans l'énoncé, on introduit la fonction ψ définie par

$$\psi(s,y) = -n/2 \ln(-4\pi s) + |y|^2/4s + n\ln(r).$$

On observe alors que si $(s,y) \in \partial E(r)$, $\Phi(-s,-y) = 1/r^n$ et donc $\psi(s,y) = 0$ sur $\partial E(r)$. En utilisant cette remarque et en faisant une intégration par parties par rapport à y, on a :

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 2\partial_s u(s+t, y+x)\frac{|y|^2}{s}\, dy\, ds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} 4\partial_s u(s+t, y+x) \sum_{i=1}^n y_i \partial_{y_i}\psi(s,y)\, dy\, ds \\
&= -\frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(4n\partial_s u(s+t, y+x)\, \psi(s,y) + 4\sum_{i=1}^n \partial_{s y_i} u(s+t, y+x) y_i \psi(s,y) \right) dy\, ds.
\end{aligned}$$

En intégrant par parties par rapport à s, on obtient :

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4n\partial_s u(s+t,y+x)\,\psi(s,y) + 4\sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(s+t,y+x) y_i \partial_s \psi(s,y) \right) dy\,ds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4n\partial_s u(s+t,y+x)\,\psi(s,y) + 4\sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(s+t,y+x) y_i \left(-\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2} \right) \right) dy\,ds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4n\partial_s u(s+t,y+x)\,\psi(s,y) - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(s+t,y+x) y_i \right) dy\,ds - J_2.
\end{aligned}$$

On utilise maintenant que u est solution de l'équation de la chaleur pour obtenir que

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= J_1 + J_2 \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \iint_{E(r)} \left(-4n(\Delta u)(s+t,y+x)\psi(s,y) - \frac{2n}{s} \sum_{i=1}^n \partial_{y_i} u(s+t,y+x) y_i \right) dy\,ds \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{i=1}^n \iint_{E(r)} \left(4n\partial_{y_i} u(s+t,y+x)\partial_{y_i}\psi(s,y) - \frac{2n}{s} \partial_{y_i} u(s+t,y+x) y_i \,dy\,ds \right) dy\,ds \\
&= 0
\end{aligned}$$

par définition de ψ. On en déduit que ϕ est constante.
b) En utilisant la question précédente, on a pour tout $r > 0$ tel que $E(t,x;r) \subset \Omega_T$,

$$\phi(r) = \lim_{\rho\to 0} \phi(\rho) = \lim_{\rho\to 0} \iint_{E(1)} u(\rho^2 s + t, \rho y + x) \frac{|y|^2}{s^2}\,dy\,ds = u(t,x) \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2}\,dy\,ds = 4\,u(t,x).$$

On va maintenant prouver l'égalité admise dans l'énoncé :

$$\iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2}\,dy\,ds = 4.$$

On note $J = \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2}\,dy\,ds$. En utilisant qu'on peut écrire $E(1)$ comme suit :

$$E(1) = \left\{ (s,y) \in \mathbb{R}^{n+1},\ -\frac{1}{4\pi} \le s < 0 \text{ et } |y|^2 \le 2ns\log(-4\pi s) \right\},$$

on a :

$$\begin{aligned}
J &= |\partial B(0,1)| \int_{-1/(4\pi)}^0 \frac{1}{s^2} \int_0^{\sqrt{2ns\log(-4\pi s)}} r^2 r^{n-1}\,dr\,ds \\
&= |\partial B(0,1)| \int_0^{1/(4\pi)} \frac{1}{s^2} \int_0^{\sqrt{-2ns\log(4\pi s)}} r^{n+1}\,dr\,ds \\
&= \frac{|\partial B(0,1)|\,(2n)^{\frac{n+2}{2}}}{n+2} \int_0^{1/(4\pi)} s^{\frac{n-2}{2}} \left(-\log(4\pi s)\right)^{\frac{n+2}{2}}\,ds.
\end{aligned}$$

Ensuite, par changements de variables, on obtient :

$$\begin{aligned}
J &= \frac{|\partial B(0,1)|\,(2n)^{\frac{n+2}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}(n+2)} \int_0^{+\infty} e^{-t\frac{n}{2}} t^{\frac{n+2}{2}}\,dt \\
&= \frac{|\partial B(0,1)|\,(2n)^{\frac{n+2}{2}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}(n+2)} \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{n+4}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-s} s^{\frac{n+4}{2}-1}\,ds.
\end{aligned}$$

Puis, en identifiant le dernier terme intégral à $\Gamma\left(n/2+2\right)$ et en utilisant le fait que $|\partial B(0,1)| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$, on a :

$$\begin{aligned} J &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}\,(2n)^{\frac{n+2}{2}}\,2^{\frac{n+4}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\,(4\pi)^{\frac{n}{2}}\,(n+2)\,n^{\frac{n+4}{2}}} \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}\,(2n)^{\frac{n+2}{2}}\,2^{\frac{n+4}{2}}\,n\,(n+2)}{4\,(4\pi)^{\frac{n}{2}}\,(n+2)\,n^{\frac{n+4}{2}}} \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du fait que

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right) = \frac{n+2}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n(n+2)}{4}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

On conclut alors que $J = 4$.

2. On choisit r assez petit pour que $E(t_0, x_0; r) \subset \Omega_T$. En utilisant la propriété de la moyenne prouvée précédemment, on a :

$$u(t_0, x_0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(t_0,x_0;r)} u(s,y)\,\frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}\,dy\,ds$$

puis en utilisant que $\frac{1}{4r^n}\iint_{E(t_0,x_0;r)} \frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}\,dy\,ds = 1$, on en déduit que

$$\frac{1}{4r^n} \iint_{E(t_0,x_0;r)} (u(t_0,x_0) - u(s,y))\,\frac{|x_0-y|^2}{(t_0-s)^2}\,dy\,ds = 0$$

avec, par définition de (t_0, x_0), $u(t_0,x_0) - u(s,y) \geq 0$ pour tout (s,y). Donc u est constante sur $E(t_0; x_0; r)$.

Soit maintenant $(s_0, y_0) \in \Omega_T$ avec $s_0 < t_0$ alors, par convexité de Ω, le segment L qui joint (t_0, x_0) à (s_0, y_0) est inclus dans Ω_T. On définit

$$\sigma_0 = \min\{s \geq s_0,\ u(t,x) = u(t_0,x_0) \ \text{ pour tout } (t,x) \in L,\ s \leq t \leq t_0\}$$

qui est bien défini par continuité de u. Si $\sigma_0 > s_0$, alors $u(\sigma_0, z_0) = u(t_0, x_0)$ pour $(\sigma_0, z_0) \in L \cap \Omega_T$ et donc $u = u(t_0, x_0)$ sur $E(\sigma_0, z_0; r)$ si r est assez petit. Comme $E(\sigma_0, z_0; r)$ contient $L \cap \{(t,x) \in\ L : \sigma_0 - \sigma \leq t \leq \sigma_0\}$ pour $\sigma > 0$ petit, on a une contradiction. Donc $\sigma_0 = s_0$ et $u = u(t_0, x_0)$ sur L. On a ainsi montré que pour $s < t_0$, u est constante sur Ω_s. Par continuité, on en conclut que u est constante sur Ω_{t_0}.

Exercice 6 : une équation de diffusion semi-linéaire
Corrigé en classe dans les détails.

Exercice 7 : un résultat d'explosion en temps fini
Corrigé en classe.