École Normale Supérieure
LP. Chaintron

Éléments de correction pour le TD n°3

Exercice 1 : équation de transport à donnée initiale peu régulière
Corrigé dans les détails en classe.

Exercice 2 : lois de conservation scalaire (premières questions)
On considère l'équation

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) , \quad u(0,x) = u_0(x) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

où $f \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

1. Montrons que si u est une solution dans $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R};\mathbb{R})$

$$\forall t \geq 0 , \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} , \quad u(t, x_0 + f'(u_0(x_0))t) = u_0(x_0) .$$

Soit $\alpha(t,x) = f'(u(t,x))$, localement lipschitzienne de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution maximale, définie sur $[0, T_{\max}[$ à

$$x'(t) = \alpha(t, x(t)) , \quad x(0) = x_0 .$$

Alors on vérifie facilement que $u(t,x(t)) = u_0(x_0)$ pour tout $t \in [0, T_{\max}[$. Par ailleurs

$$x'(t) = f'(u_0(x_0))$$

donc

$$x(t) = f'(u_0(x_0))t + x_0$$

donc $T_{\max} = \infty$.

2. Si f' n'est pas constante, alors il existe v_0, v_1 tels que $f'(v_0) > f'(v_1)$, et on construit $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que $u_0(x_0) = v_0$ et $u_0(x_1) = v_1$ avec $x_0 < x_1$. Si $u \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R};\mathbb{R})$ est solution avec cette donnée initiale alors par la question précédente

$$u(t, x_0 + f'(u_0(x_0))t) = u_0(x_0) = v_0 \quad \text{et} \quad u(t, x_1 + f'(u_0(x_1))t) = u_0(x_1) = v_1 .$$

Soit $T := \frac{x_1 - x_0}{f'(v_0) - f'(v_1)}$ alors en posant $\bar{x} := x_0 + f'(v_0)T = x_1 + f'(v_1)T$

$$u(T, \bar{x}) = u_0(x_0) = v_0 = u_0(x_1) = v_1$$

ce qui est impossible.

Exercice 3 : ondes de choc et de détente
Laissé en entraînement. Venir me voir si questions.

Exercice 4 : condition de Rankine-Hugoniot
Soit $f \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $\sigma \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On s'intéresse à l'équation

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0 .$$

On pose

$$\Omega_\pm := \Big\{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 , \quad \pm(x - \sigma(t)) > 0 \Big\} .$$

On suppose qu'il existe $u_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}$, avec $U_\pm$ un voisinage de $\overline{\Omega}_\pm$, dans C^1, solutions de l'équation sur $U_\pm$. On suppose que $u_\pm$ et $\partial_x u_\pm$ sont bornées, et on définit

$$u := u_+ \mathbf{1}_{U_+} + u_- \mathbf{1}_{U_-} .$$

1. Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, calculons la dérivée par rapport à t de

$$I_-(t) := \int_{-\infty}^{\sigma(t)} u_-(t,x)\phi(t,x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad I_+(t) := \int_{\sigma(t)}^{\infty} u_+(t,x)\phi(t,x)\,\mathrm{d}x\,.$$

On remarque que u et $f(u)$ sont des fonctions bornées. En particulier les intégrales sont bien définies. Soit

$$G_-(t,y) := \int_{-\infty}^{y} u_-(t,x)\phi(t,x)\,\mathrm{d}x\,, \quad (t,y) \in U_-\,.$$

Alors $\partial_y G_-$ existe sur U_- et est continue : on a $\partial_y G_-(t,y) = u_-(t,y)\phi(t,y)$. En outre

$$\partial_t\big(u_-(t,x)\phi(t,x)\big) = -f'\big(u_-(t,x)\big)\partial_x u_-(t,x)\phi(t,x) + u_-(t,x)\partial_t\phi(t,x)$$

vérifie

$$\Big|\partial_t\big(u_-(t,x)\phi(t,x)\big)\Big| \leq \Big(\|f'\|_{L^\infty(-\|u_-\|_{L^\infty(\Omega_-)},\|u_-\|_{L^\infty(\Omega_-)})}\|\partial_x u_-\|_{L^\infty(\Omega_-)} + \|u_-\|_{L^\infty(\Omega_-)}\Big)\frac{C(\phi)}{1+|x|^2}\,.$$

On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale pour obtenir

$$\partial_t G_-(t,y) = \int_{-\infty}^{y} \partial_t\big(u_-(t,x)\phi(t,x)\big)\,\mathrm{d}x$$

donc G_- est de classe C^1 et on a finalement

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\sigma(t)} u_-(t,x)\phi(t,x)\,\mathrm{d}x = \sigma'(t)u_-\big(t,\sigma(t)\big)\phi\big(t,\sigma(t)\big) + \int_{-\infty}^{\sigma(t)} \partial_t\big(u_-(t,x)\phi(t,x)\big)\,\mathrm{d}x$$

et de même

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\int_{\sigma(t)}^{\infty} u_+(t,x)\phi(t,x)\,\mathrm{d}x = -\sigma'(t)u_+\big(t,\sigma(t)\big)\phi\big(t,\sigma(t)\big) + \int_{\sigma(t)}^{\infty} \partial_t\big(u_+(t,x)\phi(t,x)\big)\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Montrons que u est solution de l'équation dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\sigma'(t)\Big(u_+\big(t,\sigma(t)\big) - u_-\big(t,\sigma(t)\big)\Big) = f\Big(u_+\big(t,\sigma(t)\big)\Big) - f\Big(u_-\big(t,\sigma(t)\big)\Big)\,.$$

Soit $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, et supposons la condition de Rankine-Hugoniot satisfaite. Alors par Fubini

$$\begin{aligned}\langle \partial_t u + \partial_x\big(f(u)\big), \phi\rangle = &-\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{\sigma(t)} u_-(t,x)\partial_t\phi(t,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}}\int_{\sigma(t)}^{\infty} u_+(t,x)\partial_t\phi(t,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &-\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{\sigma(t)} f\big(u_-(t,x)\big)\partial_x\phi(t,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}}\int_{\sigma(t)}^{\infty} f\big(u_+(t,x)\big)\partial_x\phi(t,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

En intégrant par parties les deux dernières intégrales et en utilisant l'équation on trouve

$$\begin{aligned}\langle \partial_t u + \partial_x\big(f(u)\big), \phi\rangle = &-\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{\sigma(t)} u_-(t,x)\partial_t\phi(t,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}}\int_{\sigma(t)}^{\infty} u_+(t,x)\partial_t\phi(t,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &+\int_{\mathbb{R}}\Big(f\big(u_+(t,\sigma(t))\big) - f\big(u_-(t,\sigma(t))\big)\Big)\phi\big(t,\sigma(t)\big)\,\mathrm{d}t\\ &-\int_{\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{\sigma(t)} \partial_t u_-(t,x)\phi(t,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{\mathbb{R}}\int_{\sigma(t)}^{\infty} \partial_t u_+(t,x)\phi(t,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

On regroupe les termes de la première et dernière ligne et on utilise la question précédente. Comme en outre

$$\int_{-\infty}^{\sigma(t)} u_-(t,x)\phi(t,x)\,\mathrm{d}x + \int_{\sigma(t)}^{\infty} u_+(t,x)\phi(t,x)\,\mathrm{d}x \to 0\,, \quad t\to\infty\,,$$

on trouve

$$\langle \partial_t u + \partial_x (f(u)), \phi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} \Big(\sigma'(t)(u_+(t,\sigma(t)) - u_-(t,\sigma(t))) \\ + f(u_+(t,\sigma(t))) - f(u_-(t,\sigma(t)))\Big)\phi(t,\sigma(t))\,\mathrm{d}t$$

et donc si la condition de Rankine-Hugoniot est vérifiée alors $\langle \partial_t u + \partial_x (f(u)), \phi \rangle = 0$.

Inversement considérons une fonction $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, positive, à support dans $[-1,1]^2$ et strictement positive en 0. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\phi_\epsilon(t,x) := \frac{1}{\epsilon}\chi\Big(\frac{(t_0,\sigma(t_0)) - (t,x)}{\epsilon}\Big) .$$

Si u vérifie l'équation et si on pose

$$h(t) := f\Big(u_+(t,\sigma(t))\Big) - f\Big(u_-(t,\sigma(t))\Big) - \sigma'(t)\Big(u_+(t,\sigma(t)) - u_-(t,\sigma(t))\Big)$$

alors on a, par le calcul ci-dessus,

$$0 = \langle \partial_t u + \partial_x (f(u)), \phi_\epsilon \rangle = \int_{-1}^{1} h(t_0 - \epsilon\tau)\chi(\tau, \frac{\sigma(t_0) - \sigma(t_0 - \epsilon\tau)}{\epsilon})\, d\tau\, .$$

En faisant tendre ϵ vers 0 on trouve

$$0 = h(t_0)\int_{-1}^{1} \chi(\tau, \sigma'(t_0)\tau)\, d\tau$$

donc $h(t_0) = 0$.

3. On suppose que $f(u) = u^2/2$ (l'équation de Burgers). Clairement $u_- = 2$ et $u_+ = 1$ conviennent avec $U_\pm = \mathbb{R}^2$. La condition de Rankine-Hugoniot s'écrit

$$\sigma'(t)(1-2) = (1-4)/2$$

donc $\sigma(t) = 3t/2 + C$. La fonction $x \mapsto u(0,x)$ est discontinue en 0 donc on prend $C = 0$ et

$$2\mathbf{1}_{x<3t/2} + \mathbf{1}_{x>3t/2}$$

convient.