CHAPITRE 0 : CORRECTION DES EXERCICES

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Écrire avec des quantificateurs.

1. Une infinité de termes de la suite sont strictement négatifs.

Éléments de correction

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une infinité de termes négatifs si et seulement si pour tout entier naturel n_0 , il existe un entier $n \geq n_0$ tel que : $u_n < 0$:

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, u_n < 0.$$

2. La suite a un nombre fini de termes strictement négatifs.

Éléments de correction

C'est exactement le contraire de la proposition précédente. La suite a un nombre fini de termes strictement négatifs si et seulement si à partir d'un certain rang n_0 , tous les termes sont positifs ou nuls :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq 0.$$

Exercice 2. Soit $\mathcal{P}$ un prédicat. Interpréter les phrases suivantes :

1. $\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, \mathcal{P}(n)$.

Éléments de correction

À partir du rang p , le prédicat est vrai.

2. $\forall p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, \mathcal{P}(n)$.

Éléments de correction

Le prédicat est vrai pour tout entier naturel.

3. $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p, \mathcal{P}(n)$.

Éléments de correction

Le prédicat est vrai pour une infinité d'entiers.

Exercice 3 (Principe du tiers-exclu). Démontrer cette proposition à l'aide d'une table de vérité.

Éléments de correction

Soit $\mathcal{P}$ une proposition quelconque.

$\mathcal{P}$	$\overline{\mathcal{P}}$	$\mathcal{P}$ ou $\overline{\mathcal{P}}$
V	F	V
F	V	V

La proposition $(\mathcal{P} \text{ ou } \overline{\mathcal{P}})$ est donc vraie quelsoit la valeur de vérité de $\mathcal{P}$.

Exercice 4 (Lois de Morgan). Démontrer cette proposition à l'aide d'une table de vérité.

Éléments de correction

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

1.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$	$\overline{\mathcal{P}} \text{ ou } \overline{\mathcal{Q}}$	$\overline{\mathcal{P}}$	$\overline{\mathcal{Q}}$	$\overline{\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}}$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

$\overline{\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}}$ et $\overline{\mathcal{P}} \text{ et } \overline{\mathcal{Q}}$ sont simultanément vraies donc sont équivalentes.

2. On pourrait montrer la deuxième loi de Morgan avec un tableau de vérité, mais on va plutôt montrer qu'elle découle de la première loi de Morgan : d'après cette dernière appliquée à $\overline{\mathcal{P}}$ et $\overline{\mathcal{Q}}$, on a que : $\overline{\overline{\mathcal{P}} \text{ ou } \overline{\mathcal{Q}}}$ et $(\overline{\overline{\mathcal{P}}}) \text{ et } (\overline{\overline{\mathcal{Q}}})$ sont équivalentes. Or $\overline{\overline{\mathcal{P}}}$ et $\mathcal{P}$ sont équivalentes, donc : $\overline{\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}}$ et $\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}$ sont équivalentes, donc leurs négations aussi ! Ainsi, on a bien prouvé que : $\overline{\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}}$ est équivalente à $\overline{\mathcal{P}} \text{ ou } \overline{\mathcal{Q}}$.

Exercice 5 (Distributivité). Démontrer cette proposition à l'aide d'une table de vérité.

Éléments de correction

Soit $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois propositions.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{R}$	$\mathcal{P}$ et $(\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{R})$	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$	$(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})$ ou $(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{R})$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Ainsi, $\mathcal{P}$ et $(\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{R})$ est équivalente à $(\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q})$ ou $(\mathcal{P}$ et $\mathcal{R})$.

Comme dans l'exercice précédent, appliquons ce résultat à $\overline{\mathcal{P}}$, $\overline{\mathcal{Q}}$ et $\overline{\mathcal{R}}$: Ainsi, $\overline{\mathcal{P}}$ et $(\overline{\mathcal{Q}}$ ou $\overline{\mathcal{R}})$ est équivalent à $(\overline{\mathcal{P}} \text{ et } \overline{\mathcal{Q}})$ ou $(\overline{\mathcal{P}} \text{ et } \overline{\mathcal{R}})$. Or, d'après les lois de Morgan :

- $\overline{\mathcal{P}}$ et $(\overline{\mathcal{Q}}$ ou $\overline{\mathcal{R}})$ ssi $\overline{\mathcal{P}}$ et $(\overline{\mathcal{Q}} \text{ et } \overline{\mathcal{R}})$ ssi $\overline{\mathcal{P} \text{ ou } (\mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R})}$.
- $(\overline{\mathcal{P}} \text{ et } \overline{\mathcal{Q}})$ ou $(\overline{\mathcal{P}} \text{ et } \overline{\mathcal{R}})$ ssi $\overline{(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})}$ ou $\overline{(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{R})}$ ssi $\overline{(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et } (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{R})}$.

Donc finalement, on a montré que : $\mathcal{P}$ ou $(\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R})$ est équivalente à $(\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q})$ et $(\mathcal{P}$ ou $\mathcal{R})$.

Exercice 6. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$,
2. $\overline{\mathcal{P}}$ et $\overline{\mathcal{Q}}$,
3. $\overline{\mathcal{P}}$ ou $\mathcal{Q}$.

Éléments de correction

Déjà, les propositions 2) et 3) sont équivalentes d'après les lois de Morgan. Il suffit donc de montrer que 1) et 3) sont équivalentes à l'aide d'une table de vérité.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\overline{\mathcal{P}}$	$\overline{\mathcal{P}}$ ou $\mathcal{Q}$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

ce qui achève la preuve.

Exercice 7 (Transitivité de l'équivalence). Démontrer ce corollaire.

Éléments de correction

Ce corollaire découle de la double-implication et de la transitivité de l'implication.

Exercice 8. Combien a-t-on économisé d'implications à démontrer en montrant la suite d'implications

$$\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_1$$

plutôt que le fait que les propositions $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ sont deux à deux équivalentes (chaque équivalence comptant pour deux implications) ?

Éléments de correction

- En montrant la suite d'implications de l'énoncé, on montre exactement n implications.
- Pour montrer que les propositions $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ sont deux à deux équivalentes, on montre que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que : $i \neq j$, on a : $\mathcal{P}_i \Rightarrow \mathcal{P}_j$. Il suffit de compter le nombre de tels couples : on a n choix pour i , et $(n-1)$ pour j (puisque $i \neq j$), donc au total $n(n-1)$ choix.

Enfin, on a économisé $n(n-2)$ implications : on fait donc au moins une économie dès que $n \geq 3$ (pour $n=2$, c'est exactement la même chose).

Exercice 9 (Disjonction de cas). Démontrer cette proposition sans table de vérité mais à l'aide des propositions précédentes (principe de tiers exclu, distributivité, ...).

Éléments de correction

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. D'après le principe du tiers-exclu, $\mathcal{P}$ ou $\overline{\mathcal{P}}$ est toujours vraie. Donc $\mathcal{Q}$ est équivalente à $[(\mathcal{P} \text{ ou } \overline{\mathcal{P}}) \text{ et } \mathcal{Q}]$ et cette dernière proposition est équivalente à $(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q})$ ou $(\overline{\mathcal{P}} \text{ et } \mathcal{Q})$ en utilisant la distributivité de « et » sur « ou ».

Enfin, en utilisant la transitivité de l'équivalence, on a bien le résultat voulu.

Exercice 10. Montrer que, pour tout entier naturel n , $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si n est pair, alors $n(n+1)$ est pair, donc $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.
- Si n est impair, alors $(n+1)$ est pair, donc $n(n+1)$ aussi et $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

Dans tous les cas, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel, ce qui achève la preuve.

Exercice 11. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (\forall z > y, x \leq z) \Rightarrow (x \leq y)$.

Éléments de correction

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On va montrer l'implication voulue par contraposition. Supposons donc que : $x > y$. On veut montrer qu'il existe $z > y$ tel que : $x > z$, autrement dit tel que : $y < z < x$. Il suffit de choisir le milieu : $z = \frac{x+y}{2}$ convient.

On a donc montré l'implication voulue par contraposition, et ceci pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Donc on a bien :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (\forall z > y, x \leq z) \Rightarrow (x \leq y).$$

Exercice 12. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Éléments de correction

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. On peut alors choisir $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ est écrit sous forme de fraction **irréductible**.

On a alors : $p^2 = 2q^2$. Ainsi, p^2 est pair, donc p est pair. Donc p^2 est multiple de 4.

Ainsi, q^2 est également pair, donc q aussi. Finalement, p et q sont pairs, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que la fraction p/q était irréductible.

On a donc bien montré que : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 13. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Éléments de correction

Supposons par l'absurde qu'il n'y a que l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers est fini. On le note :

$$\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_n\},$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ est le nombre de nombres premiers deux à deux distincts. On pose $N = p_1 \dots p_n + 1$. On a $N \geq 2$ donc N admet un diviseur premier (on montre ce résultat ci-dessous).

On peut choisir $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que p_j divise N . Mais p_j divise aussi $p_1 \dots p_n$ donc divise $N - p_1 \dots p_n = 1$. C'est absurde.

Finalement, on a bien montré que $\boxed{\mathcal{P} \text{ est infini}}$.

Montrons que tout entier $N \geq 2$ admet un diviseur premier par récurrence forte. On pose donc pour tout $N \geq 2$, $\mathcal{P}(N)$: « N admet un diviseur premier ».

- $\mathcal{P}(2)$ est vrai puisque 2 admet 2 comme diviseur premier.
- Soit $N \geq 3$. Supposons que pour tout $k \in \llbracket 2, N-1 \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$.
 - Si N est premier, alors $\mathcal{P}(N)$ est clair.

- Sinon, N est composé, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers a et b tels que : $N = ab$ et $2 \leq a < N$. En particulier, par hypothèse de récurrence, a admet un diviseur premier. N admet aussitôt le même diviseur premier.

Finalement, d'après le principe de récurrence forte, on a montré que tout entier $N \geq 2$ admet un diviseur premier.

Exercice 14 (Plus grand / plus élément d'une partie de $\mathbb{Z}/\mathbb{N}$). Démontrer ce corollaire (à partir de l'axiome).

Éléments de correction

Il s'agit donc de montrer que :

1. Toute partie **non vide** de $\mathbb{Z}$ et minorée admet un plus petit élément.
 2. Toute partie **non vide** de $\mathbb{Z}$ et majorée admet un plus grand élément.
 3. Toute partie **non vide** de $\mathbb{N}$ et majorée admet un plus grand élément.
1. Soit A une partie non vide de $\mathbb{Z}$ minorée. Soit m un minorant de A . On a pour tout $a \in A$, $a \geq m$, i.e. $a - m \in \mathbb{N}$. Posons donc :

$$B = \{a - m \mid a \in A\}$$

B est une partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément b_m . Ainsi, pour tout $b_m \in B$ et pour tout $b \in B$, $b \leq b_m$.

Puisque $b_m \in B$, alors on peut choisir $a_m \in A$ tel que : $b_m = a_m - m$. Pour tout $a \in A$, $a - m \in B$ donc $a - m \leq b_m = a_m - m$. Ainsi, $a \leq a_m$, et ceci pour tout $a \in A$.

Finalement, on a montré que a_m est un élément de A et que tout élément de A est plus petit que a_m .

Finalement A admet a_m comme plus grand élément, ce qui achève la preuve du premier point.

2. Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$. On pose : $B = \{-a \mid a \in A\}$. B est non vide. Soit M un majorant de A . Alors pour tout $a \in A$, $-a \geq -M$. Donc B est minorée par $-M$. Ainsi, d'après le point précédent, B admet un plus petit élément n_0 . Alors : $-n_0 \in A$ et pour tout $n \in A$, $-n \in B$ donc $-n \geq n_0$, i.e. $n \leq -n_0$.
- Ainsi, A admet un plus grand élément : $-n_0$, ce qui achève la preuve.

3. Le troisième point découle immédiatement du deuxième puisque toute partie de $\mathbb{N}$ est une partie de $\mathbb{Z}$.

Exercice 15. Démontrer le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. On pourra supposer dans un premier temps que $a \in \mathbb{N}$, et considérer :

$$\{n \in \mathbb{N} \mid bn \leq a\}.$$

Éléments de correction

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $b > 0$.

- On suppose que $a \in \mathbb{N}$. Posons $A = \{n \in \mathbb{N} \mid bn \leq a\}$.
 $0 \in A$, donc A est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Puisque $b \geq 1$, on a pour tout $n \in A$, $n \leq bn \leq a$. Donc A est majorée par a .
Ainsi, A admet un plus grand élément que l'on note q . Par définition d'un plus grand élément, $q \in A$ et $q + 1 \notin A$. Donc : $bq \leq a < b(q + 1)$.
On pose alors $r = a - bq$. On a : $0 \leq r < b$. On a donc bien prouvé l'existence d'un couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$a = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b.$$

- On suppose maintenant que $a < 0$. Alors, d'après la première partie appliquée à $-a$, on peut choisir

$(q_1, r_1) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$-a = bq_1 + r_1 \text{ et } 0 \leq r < b.$$

Ainsi, $a = b \times (-q_1) - r_1 = b \times (-q_1 - 1) + (b - r_1)$.

- Si $r_1 = 0$, alors on pose $q = -q_1$ et $r = 0$. On a bien $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.
- Si $r_1 > 0$, alors $0 < b - r_1 < b$. On pose $q = -q_1 - 1$ et $r = b - r_1$. On a bien $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

Finalement, dans les deux cas, on a bien prouvé l'**existence** d'un couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

Montrons maintenant l'unicité d'un tel couple. Soit $(q_1, r_1) \in \mathbb{Z}^2$ et $(q_2, r_2) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$$a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2, \quad 0 \leq r_1 < b, \quad \text{et} \quad 0 \leq r_2 < b.$$

On a : $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Or $-b < r_2 - r_1 < b$. Donc $b(q_1 - q_2)$ est un multiple de b strictement compris entre $-b$ et b : c'est donc 0. Ainsi, puisque $b \neq 0$, on peut conclure que $q_1 - q_2 = 0$, i.e. $q_1 = q_2$ et aussitôt $r_1 = r_2$. On a donc bien prouvé l'unicité (et l'existence) dans le théorème de division euclidienne.

Exercice 16. Démontrer le principe de récurrence. On pourra considérer l'ensemble :

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \overline{\mathcal{P}(n)}\}.$$

Éléments de correction

Soit $\mathcal{P}$ un prédicat tel que :

- $\mathcal{P}(0)$;
- $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\overline{\mathcal{P}(n)}$.

Alors $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \overline{\mathcal{P}(n)}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$: elle admet un plus petit élément que l'on note n_0 . On a nécessairement $n_0 \geq 1$, car $\mathcal{P}(0)$. Donc $n_0 - 1 \in \mathbb{N}$. Et par définition de n_0 , on a : $n_0 - 1 \notin A$. Donc $\mathcal{P}(n_0 - 1)$, et puisque $\mathcal{P}(n_0 - 1) \Rightarrow \mathcal{P}(n_0)$, on a $\mathcal{P}(n_0)$. C'est absurde puisque $n_0 \in A$.

Finalement, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n).$$

Exercice 17. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par :

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n + 1$$

Donner, pour tout entier naturel n , une expression de u_n .

Éléments de correction

On calcule les premiers termes : $u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 7, u_4 = 15, \dots$. On pose donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2^n - 1$ ».

- $u_1 = 2^1 - 1$, donc $\mathcal{P}(1)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a :

$$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, en vertu du principe de récurrence, on a prouvé que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2^n - 1.$$

Exercice 18. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$$

Donner, pour tout entier naturel n , une expression de u_n .

Éléments de correction

On calcule les premiers termes :

$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 2 \times 2 - 1 = 3, u_3 = 2 \times 3 - 2 = 4, \dots$$

On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + 1$.

Posons donc, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = n + 1$ ».

- $u_0 = 0 + 1$, donc on a bien $\mathcal{P}(0)$. De plus, $u_1 = 1 + 1$, donc on a bien $\mathcal{P}(1)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$. Montrons $\mathcal{P}(n + 2)$.

On a :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n = 2(n + 1 + 1) - (n + 1) = n + 3 = (n + 2) + 1.$$

Donc $\mathcal{P}(n + 2)$.

Ainsi, en vertu du principe de récurrence (double), on a bien montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n + 1.$$

Exercice 19. Montrer que le principe de récurrence forte est équivalent au principe de récurrence (simple).

Éléments de correction

On va procéder par double-implication :

- Supposons le principe de récurrence forte. Montrons le principe de récurrence. Ainsi, soit $\mathcal{P}$ un prédicat tel que :
 - $\mathcal{P}(0)$.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1)$.

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n).$$

Ainsi, on a :

- $\mathcal{P}(0)$,
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1)$.

D'après le principe de récurrence forte, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$. Ainsi, on a prouvé le principe de récurrence simple, en supposant le principe de récurrence forte.

- Réciproquement, supposons le principe de récurrence simple, et montrons le principe de récurrence forte. Ainsi, soit $\mathcal{P}$ un prédicat tel que :
 - $\mathcal{P}(0)$.
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n + 1)$.

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) : \ll \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathcal{P}(k) \gg$.

- On a bien $\mathcal{Q}(0)$,
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{Q}(n)$ et montrons $\mathcal{Q}(n+1)$. Par hypothèse, on a $\mathcal{Q}(n)$ donc $\mathcal{P}(n+1)$. Donc on a $Q(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$, c'est-à-dire $Q(n+1)$.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$. En particulier, on a bien comme voulu : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$.

Finalement, on a bien montré par double-implication, que le principe de récurrence forte et le principe de récurrence simple sont équivalents.

Exercice 20. Montrer que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un réel et d'une fonction qui s'annule en 0.

Éléments de correction

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Raisonnons par analyse-synthèse.

Soit C et g un réel et une application qui s'annule en 0 tels que : $f = C + g$. On a $f(0) = C + 0$, et donc : $g = f - f(0)$.

Réciproquement, posons $C = f(0)$ et $g = f - f(0)$. On a bien :

- $C \in \mathbb{R}$,
- $g(0) = f(0) - f(0) = 0$.
- $f = C + g$.

Finalement, on a bien montré par analyse synthèse qu'il existe un unique couple (C, g) tel que : C est un réel, g une application qui s'annule en 0 et $f = C + g$.

Exercice 21. Montrer que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une application paire et d'une application impaire.

Éléments de correction

Raisonnons par analyse-synthèse. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit (g, h) un couple d'applications telles que $f = g + h$, g est paire et h est impaire.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = g(x) + h(x), \quad \text{et} \quad f(-x) = g(x) - h(x).$$

Et donc :

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Réciproquement, posons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

On a bien que g est paire, h impaire et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) + h(x)$.

Ainsi, on a bien prouvé par analyse-synthèse, l'existence et l'unicité d'un couple (g, h) d'applications telles que $f = g + h$, g est paire et h est impaire.

Exercice 22. Montrer la transitivité de l'inclusion.

Éléments de correction

Soit E un ensemble, et A, B, C trois parties de E . On suppose que $A \subset B$ et $B \subset C$. On cherche à montrer que $A \subset C$. Soit $x \in A$. Puisque $A \subset B$, on a $x \in B$. Et, puisque $B \subset C$, on a $x \in C$. Finalement, on a prouvé que pour tout $x \in A$, $x \in C$, i.e. que $A \subset C$.

On a donc prouvé que l'inclusion était transitive.

Exercice 23. Déterminer $\mathcal{P}(\{0, 1\})$.

Éléments de correction

$$\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

Exercice 24. Démontrer que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Éléments de correction

On va montrer que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles, et que réciproquement tout intervalle de $\mathbb{R}$ est convexe.

- Soit C un convexe de $\mathbb{R}$. Soit $(a, b) \in C^2$. On suppose $a < b$.
Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que : $a \leq c \leq b$. Montrons que $c \in C$.
Il suffit de trouver $\lambda \in [0, 1]$ tel que : $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$ ssi $b - c = \lambda(b - a)$ ssi $\lambda = \frac{b-c}{b-a}$.
Posons donc $\lambda = \frac{b-c}{b-a}$. Puisque : $a \leq c \leq b$, on a : $0 \leq b - c \leq b - a$, donc puisque $b - a > 0$, $\lambda \in [0, 1]$. De plus, $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$.
Or $(a, b) \in C^2$ donc par définition d'un convexe, on a bien $c \in C$.
Finalement, on a donc bien montré que :

$$\forall (a, b) \in C^2, a < b \Rightarrow (\forall c \in \mathbb{R}, a \leq c \leq b \Rightarrow c \in C),$$

i.e. que C est un intervalle.

- Soit maintenant I un intervalle. Soit $(a, b) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$. Montrons que $\lambda a + (1 - \lambda)b \in I$. On a :

$$\min(a, b) = \lambda \min(a, b) + (1 - \lambda) \min(a, b) \leq \lambda a + (1 - \lambda)b \leq \max(a, b),$$

car $\lambda \geq 0$ et $1 - \lambda \geq 0$, donc le sens des inégalités est inchangé. Or $\{\min(a, b), \max(a, b)\} = \{a, b\}$, donc $\min(a, b) \in I$ et $\max(a, b) \in I$. Ainsi, d'après la caractérisation des intervalles, on a : $\lambda a + (1 - \lambda)b \in I$, et ceci pour tout $(a, b, \lambda) \in I^2 \times [0, 1]$. On a donc prouvé que I est convexe.

Finalement, on a bien prouvé que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Exercice 25. Déterminer les ensembles suivants :

- $\bigcup_{n=0}^{10} [0, n[$
- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[$
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] =$

Éléments de correction

1. Il est clair, puisque pour tout $n \in [0, 10]$, $[0, n[\subset [0, 10[$ que :

$$\bigcup_{n=0}^{10} [0, n[= [0, 10[.$$

2. Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[$. On a en particulier (pour $n = 1$), que : $x \in]-1, 0[$, et donc $x < 0$.

Or, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x > -\frac{1}{n}$, donc par passage à la limite a $x \geq 0$. C'est absurde!

Finalement :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right[= \emptyset.$$

3. Pour mieux voir, écrivons :

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left] -\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right[= [-1, 0] \cup \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\cup \left] -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right[\cup \left] -\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right[\cup \dots$$

Il semblerait que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left] -\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right[= [-1, 1[$. Montrons-le par double-inclusion.

- Soit $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left] -\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right[$. On peut choisir $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $x \in \left] -\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right[$. On a donc : $-1 \leq -\frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$, donc $x \in [-1, 1[$.
- Réciproquement, soit $x \in [-1, 1[$.
 - Si $x \leq 0$, alors $x \in [-1, 0]$, donc $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left] -\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right[$.
 - Sinon, $x > 0$. On a : $x < 1$ et $1 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, donc on peut choisir $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $x \leq 1 - \frac{1}{n}$ (il suffit de choisir un entier n tel que : $n \geq \frac{1}{1-x}$). On a alors $x \in \left] -\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right[$, donc $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left] -\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right[$.

Finalement, on a bien montré que :

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left] -\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right[= [-1, 1[.$$

a. En effet, si $x < 0$, alors on peut choisir un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que : $n > -1/x$ donc $-n < 1/x$ et par décroissance de $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $x < -1/n$, ce qui constitue bien une contradiction.

Exercice 26. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A_0, A_1, \dots, A_n$ des parties de E telles que : $\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = E$. Montrer que la famille $(A_k \setminus A_{k-1})_{1 \leq k \leq n}$ forme une partition de E .

Éléments de correction

On fait un joli dessin pour constater que les différents ensembles forment les différentes strates / couches d'une boule. Montrons donc les trois points. On note, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$.

- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si $B_k = \emptyset$, alors $A_k \subset A_{k-1}$ et aussitôt $A_{k-1} = A_k$ puisque l'on dispose de l'inclusion réciproque. Par contraposition, puisque $A_k \neq A_{k-1}$ on a bien $B_k \neq \emptyset$.
- Soit maintenant $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. On suppose $i \neq j$, montrons que $B_i \cap B_j = \emptyset$. Par symétrie, on peut supposer que $i < j$, donc que $i \leq j - 1$. Puisque $B_j \subset \overline{A_{j-1}}$, $B_i \subset A_i$, on a : $B_i \cap B_j \subset A_i \cap \overline{A_{j-1}} = \emptyset$, où la dernière égalité découle de l'inclusion $A_i \subset A_{j-1}$ (car $i \leq j - 1$). On a donc bien comme voulu $B_i \cap B_j = \emptyset$.
- Montrons enfin que $\bigcup_{i=1}^n B_i = E$. Il suffit de montrer l'inclusion réciproque, puisque l'on a clairement l'inclusion directe. Soit donc $x \in E$. x appartient à $A_n = E$, s'il n'appartient pas à A_{n-1} , il appartient à la « couche la plus extérieure » : B_n . Sinon (i.e. s'il appartient à A_{n-1}), on distingue selon qu'il appartient à A_{n-2} , et ainsi de suite. Plus précisément, soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ le plus petit entier tel que $x \in A_k$ (il existe puisque l'ensemble des indices $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x \in A_j$ est fini et non vide). On a par définition $x \in A_k$ et $x \notin A_{k-1}$, donc $x \in B_k$. Ainsi, on a bien prouvé que $x \in \bigcup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} B_i$, et ceci pour tout $x \in E$, ce qui achève la preuve.