

LASER

EIDD 2A GP

2024-2025

TD 8

Révisions

CORRECTION

Exercice 1 : Gain non saturé du laser à quatre niveaux

Les trois premières questions sont directement celles de l'examen 2021 !

La région active de plusieurs lasers peut être schématisée par un système à quatre niveaux.

- 1- Expliquer pourquoi il n'est pas possible de réaliser un laser utilisant comme milieu actif un système à deux niveaux.

L'inversion de population ne pourrait pas être positive, cf cours ou TD 1.

- 2- Expliquer qualitativement le fonctionnement d'un laser à quatre niveaux.

On envoie les atomes du niveau fondamental au niveau de pompe qui, instable, les renvoie vers le niveau haut de la transition laser : tout se passe comme si on pompait directement du fondamental vers l'inversion de population. Le niveau bas de la transition laser est instable et renvoie vers le fondamental, ce qui maximise l'inversion de population.

- 3- Après avoir défini les grandeurs appropriées, établir les équations bilan dans le cas d'un laser à quatre niveaux.

cf TD2. On obtient, pour D d'inversion de population: (cf TD2 pour détails)

$$\dot{D} = W_p N - (W_p + \gamma_2 + B \phi) D$$

- 4- Exprimer l'intensité lumineuse I , c'est à dire le débit de puissance lumineuse par unité de surface, en fonction de ϕ le nombre de photons en cavité, h la constante de Planck, ν la fréquence des photons considérés, c la vitesse de la lumière et V_a le volume de mode.

L'énergie lumineuse passant à travers une surface S pendant dt est

$$dE = S \cdot c dt \cdot h\nu \cdot \frac{\phi}{V_a}$$

où $c dt$ est la distance parcourue par les photons et $\frac{\phi}{V_a}$ est la densité de photons et donc $h\nu \cdot \frac{\phi}{V_a}$ la densité d'énergie lumineuse. Or on a aussi $dE = SI dt$ d'où $I = h\nu c \frac{\phi}{V_a}$.

- 5- On appellera D_0 la différence de population lorsque l'intensité intracavité est nulle. Dans le cas du laser fonctionnant en régime continu (pas d'évolution temporelle de l'inversion de population), montrer que l'on peut exprimer D sous la forme

$$D = \frac{D_0}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}}}$$

où l'on exprimera l'intensité de saturation I_{sat} en fonction des paramètres du problème.

En prenant $\dot{D} = 0$ et $\phi = 0$ on a $D_0 = \frac{W_p}{W_p + \gamma_2} N$. En prenant cette fois $\dot{D} = 0$ et ϕ quelconque on a

$$\begin{aligned} 0 &= W_p N - (W_p + \gamma_2 + B\phi)D \\ D(W_p + \gamma_2 + B\phi) &= (W_p + \gamma_2)D_0 \\ D &= \frac{D_0}{1 + \frac{B}{W_p + \gamma_2}\phi} \\ D &= \frac{D_0}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}}} \end{aligned}$$

avec $I_{\text{sat}} = \frac{h\nu B}{V_a B} (W_p + \gamma_2)$

- 6- Lorsque la lumière traverse le milieu amplificateur (situé entre $z = 0$ et $z = L$) elle est amplifiée. On appelle $I(z)$ l'intensité optique dépendant de la cote z . On définit le gain linéique en intensité g tel que

$$I(z) = I_0 e^{gz}$$

et on a $g = D\sigma$ où D est l'inversion de population et σ la section efficace d'absorption. En déduire que g peut s'exprimer sous la forme

$$g = \frac{g_0}{1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}}}$$

où g_0 est le gain non saturé, que l'on exprimera.

$$g_0 = \sigma D_0 = \sigma \frac{W_p}{W_p + \gamma_2} N$$

- 7- Établir l'expression de l'intensité totale intracavité I en fonction du gain g , du gain non saturé et de l'intensité de saturation

$$I = I_{\text{sat}} \left(\frac{g_0}{g} - 1 \right)$$

Exercice 2 : Une cavité plan-convexe

On considère une cavité plan-convexe de taille d , aux extrémités de laquelle sont situés d'une part un miroir plan et d'autre part un miroir sphérique de rayon de courbure R , tel que $R = 5d$.

- 1- Faire un schéma représentant la situation.
cf exercice cavité plan convexe du TD 4.
- 2- On considère dans cette cavité la propagation d'un faisceau gaussien. Décrire en quoi cela consiste et pourquoi on les utilise pour décrire la lumière laser.
Décrit bien de la lumière qui se propage de manière directionnelle, solution des eq de mxl autre que onde plane... cf TD 3
- 3- Un faisceau gaussien admet un rayon de courbure complexe $q(z)$ vérifiant

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R(z)} - \frac{2i}{kw(z)^2}$$

Donner une interprétation physique des quantités R et w .

R rayon de courbure du faisceau, w rayon effectif du faisceau, taille sur laquelle il y a de la lumière.

- 4- Quelle est la matrice ABCD représentant un trajet d'un aller-retour dans la cavité, en partant du miroir plan ?
La trajectoire 'dépliée' est celle ci : propagation sur une distance d , réflexion sur le miroir sphérique, propagation sur une distance d . D'où la matrice

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2d/R & 2d - 2d^2/R \\ -2/R & 1 - 2d/R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3/5 & 8d/5 \\ -2/(5d) & 3/5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 5- Cette cavité est-elle stable ?
Oui si et seulement si $q' = \frac{aq+B}{Cq+D} = q$ i.e. $0 < (A + D + 2)/4 < 1$ ou bien $-1 < (A + D)/2 < 1$.

$$\frac{A + D}{2} = 1 - 2\frac{d}{R} = 1 - 2/5 = 3/5$$

qui est bien entre -1 et 1. La cavité est donc stable.

- 6- Déterminer la longueur de Rayleigh du faisceau gaussien dont le mode TEM₀₀ est stable en fonction de d .
On peut écrire

$$\begin{aligned} q' &= q \\ \frac{(1 - \frac{2d}{R})(-iz_R) + 2d - \frac{2d^2}{R}}{-\frac{2}{R}(-iz_R) + 1 - \frac{2d}{R}} &= -iz_R \\ \left(1 - \frac{2d}{R}\right)(-iz_R) + 2d - \frac{2d^2}{R} &= \frac{2z_R^2}{R} + (-iz_R)\left(1 - \frac{2d}{R}\right) \\ Rd - d^2 &= z_R^2 \end{aligned}$$

D'où $z_R = 2d$

- 7- En déduire la taille du waist de ce faisceau en fonction de λ et de d .
puisque $\theta = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$, on a $w_0 = \sqrt{\lambda/\pi z_R} = \sqrt{\lambda/2\pi d}$

Données : On rappelle les matrices ABCD associées aux principales transformations

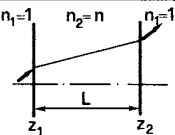
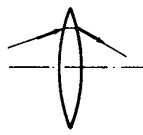
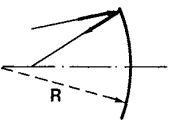
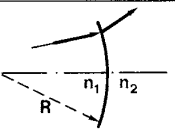
Free space propagation		$\begin{bmatrix} 1 & \frac{L}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
Thin lens		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$
Spherical mirror		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$
Spherical dielectric interface		$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{n_2} \frac{1}{R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$

Figure 1: Matrices ABCD courantes, d'après O. Svelto.

Exercice 3 : BONUS: Profil elliptique du faisceau

Un laser à semiconducteur possède la particularité d'émettre un faisceau gaussien avec un profil transverse elliptique : dans le plan du *waist* le faisceau possède un front d'onde plan mais deux *waist* différents $w_{0,x}$ et $w_{0,y}$ selon les deux directions x et y du plan transverse.

- 1- Montrer qualitativement qu'il existe une distance d_0 pour laquelle le faisceau redevient circulaire puis qu'au-delà de d_0 l'ellipticité du faisceau s'inverse (le grand axe prend la place du petit axe de l'ellipse et inversement).

Le faisceau de plus petit *waist* a une plus grande divergence et vice-versa, nécessairement les courbes se croisent.

- 2- Déterminer d_0 en fonction de $z_{R,x}$ et $z_{R,y}$

$$w_{xy} = w_{0,xy} \sqrt{1 + (z/z_{R,xy})^2} \text{ d'où}$$

$$w_x = w_y \Leftrightarrow \sqrt{z_x \frac{\pi}{\lambda}} \sqrt{1 + \left(\frac{d_0}{z_x}\right)^2} = \sqrt{z_y \frac{\pi}{\lambda}} \sqrt{1 + \left(\frac{d_0}{z_y}\right)^2}$$

$$z_x - z_y = d_0^2 \left(\frac{1}{z_y} - \frac{1}{z_x} \right)$$

$$\text{d'où } d_0 = \sqrt{z_{R,x} z_{R,y}}$$

- 3- Evaluer numériquement d_0 pour un laser à semiconducteur typique: $\lambda = 800 \text{ nm}$, $w_{0,y} = 1 \mu\text{m}$ et $w_{0,x} = 3 \mu\text{m}$.

$$d_0 = 12 \mu\text{m}$$