

LASER

EIDD 2A GP

2024-2025

TD 7

Le laser dynamique (2) : Verrouillage de modes

Exercice 1 : Principe du verrouillage de modes

On considère un signal constitué d'un grand nombre N de modes dont l'expression est

$$E(t) = \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} E_p e^{i(\omega_p t + \varphi_p)}$$

On considère que les modes sont régulièrement répartis autour d'une fréquence centrale ω_0 , i.e. $\omega_p = \omega_0 + p\omega_c$ avec $\omega_c = 2\pi/\tau_{RT}$, où τ_{RT} est le temps d'un aller retour dans la cavité. Pour simplifier, on considèrera ici que l'amplitude des modes est constante, c'est à dire $E_p = E_0$. On rappelle que l'intensité (moyennée sur une période de pulsation ω_0 est définie par $I = \frac{1}{2}n\varepsilon_0 c |E(t)|^2$

- 1- On considère d'abord que les modes sont incohérents (phases φ_p aléatoires). Justifier que l'intensité obtenue soit en général de l'ordre de l'intensité moyenne $I_0 = \langle I \rangle$, que l'on exprimera en fonction notamment de N et E_0 .
- 2- On suppose maintenant que les phases sont 'verrouillées', c'est à dire qu'elles vérifient la relation

$$\varphi_p = 0$$

pour tout entier p . Exprimer $I(t)$ en fonction de I_0 , N et ω_c et représenter graphiquement cette fonction.

- 3- En déduire la dépendance de l'intensité maximum I_p en fonction de N .
- 4- En utilisant le fait que la puissance moyenne du laser n'ait pas changé, en déduire une estimation de la largeur temporelle $\Delta\tau_p$ de l'impulsion.

Exercice 2 : Verrouillage de modes actif (AM ML)

Dans cet exercice, on étudie une technique de verrouillage de modes actif : la modulation d'amplitude (*Amplitude Modulation*, AM).

On considère le champ électrique (polarisé rectilignement) à l'intérieur d'une cavité laser dont l'expression est

$$E(t) = \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} E_p(t) = \sum_{-(N-1)/2}^{(N-1)/2} E_p \cos(\omega_p t + \varphi_p)$$

avec $\omega_p = \omega_0 + p\omega_c$ et $\omega_c = 2\pi/\tau_{RT}$, où $\tau_{RT} = 2\ell/c$ est le temps d'un aller retour dans la cavité. On introduit près d'un des miroirs de la cavité un modulateur, un dispositif qui induit des pertes en amplitude variant périodiquement. Ainsi, l'amplitude du champ électrique est multipliée par

$$P(t) = \frac{1+\rho}{2} + \frac{1-\rho}{2} \cos \Omega t$$

où ρ est le coefficient de pertes en amplitude et Ω la fréquence de modulation.

- 1- Donner l'expression modifiée du champ $E_p(t)$ en tenant compte de l'ajout des pertes modulées.
- 2- Montrer que l'on peut mettre $E_p(t)$ sous la forme

$$E_p(t) = E_p \left(\frac{1+\rho}{2} \cos(\omega_p t + \varphi_p) + \frac{1-\rho}{4} \cos((\omega_p + \Omega)t + \varphi_p) + \frac{1-\rho}{4} \cos((\omega_p - \Omega)t + \varphi_p) \right)$$

- 3- On considère le cas d'un laser à saturation homogène. Avant l'activation du modulateur, il n'y a qu'un seul mode amplifié présent dans la cavité : $E_{p \neq 0}(t < 0) = 0$. On allume la modulation d'amplitude à $t = 0$. Montrer que moyennant une condition sur Ω il est possible d'obtenir un régime verrouillé où pour tout p , $\phi_p = \phi_0$.
- 4- Représenter la fonction $P(t)$ en fonction du temps. Sur le même graphe, représenter l'impulsion générée. Donner une interprétation temporelle du phénomène (par opposition à la description spectrale qui vient d'être faite).
- 5- Un traitement analytique de la situation décrite permet de donner une estimation de la durée de l'impulsion obtenue à l'aide de la formule suivante :

$$\Delta\tau_p = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\pi} \sqrt[4]{\frac{2g_0}{\ln(1/\rho^2)}} \frac{1}{\sqrt{f_m \Delta\nu}}$$

avec

- g_0 le gain linéique intégré sur un trajet,
- $f_m = \Omega/2\pi$ la fréquence de modulation,
- $\Delta\nu$ la largeur de raie de la transition.

Faire l'application numérique pour un laser Nd:YAG ayant les caractéristiques suivantes : $\Delta\nu = 2.5$ GHz, longueur de cavité $\ell = 50$ cm, gain linéaire intégré $g_0 = 0.12$, intensité de la modulation $\rho = 0.55$.

Exercice 3 : Verrouillage de modes passif (KLM)

Dans cet exercice, on étudie une technique de verrouillage de modes passif : le verrouillage de modes par lentille Kerr (*Kerr Lens Mode-locking*, KLM). C'est la technique qui a longtemps permis l'obtention des impulsions les plus courtes. Par exemple il est possible en utilisant un laser Ti:Sa de générer des impulsions à 800 nm de 3 fs de large !

Un milieu Kerr est un milieu dont l'indice varie avec l'intensité du champ électrique le traversant. On note l'indice d'un tel milieu $n = n_0 + n_2 I$, avec n_2 un coefficient positif. En général, cet effet très faible (n_2 est typiquement de l'ordre de 10^{-8} cm²/GW) mais dans le cas des lasers à impulsions courtes ayant des hautes intensités il peut devenir notable.

- 1- Pour une lentille plan-convexe de focale f , d'indice n et d'épaisseur maximale e_0 le profil d'épaisseur près de l'axe optique est

$$e(r) = e_0 - \frac{r^2}{2f(n-1)}$$

(fig. 1). Calculer le déphasage $\Delta\phi_\ell$ induit pour une onde se propageant entre $x = 0$ et $x = e_0$.

- 2- On considère maintenant un faisceau gaussien de rayon w ayant un profil transverse d'intensité $I(r) = I_p \exp(-2r^2/w^2)$. Donner le déphasage $\Delta\phi(r)$ subi par le faisceau lors de la traversée d'un milieu Kerr de longueur ℓ .
- 3- En faisant un développement limité au premier ordre en r^2/w^2 (approximation paraxiale), montrer que $\Delta\phi$ est une fonction parabolique de r . En déduire que le milieu Kerr se comporte au premier ordre comme une lentille sphérique : on parle de lentille Kerr.
- 4- En déduire que la lentille Kerr est équivalente à une lentille convergente de focale

$$f = \frac{w^2}{4n_2 I_p \ell}$$

- 5- Comment varie la focale équivalente de la lentille Kerr avec l'intensité du faisceau ? Expliquer comment il est possible de créer des pertes ciblant les faisceaux peu intenses et ainsi de favoriser les impulsions puissantes à l'aide de dispositifs comme celui présenté figure 2.

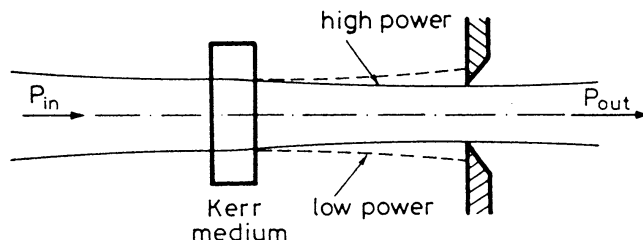


Figure 2: Dispositif induisant des pertes non-linéaires par autofocalisation Kerr (d'après O. Svelto, *Principles of Lasers*).

- 6- On considère une impulsion de waist $w = 50 \mu\text{m}$ et de puissance de crête $I_p = 150 \text{ kW}$ dans un cristal de Titane-Saphir (Ti:Al₂O₃, pour lequel $n_2 = 3.45 \cdot 10^{-16}$ cm²/W) de 4 mm de long. Calculer la focale équivalente f .

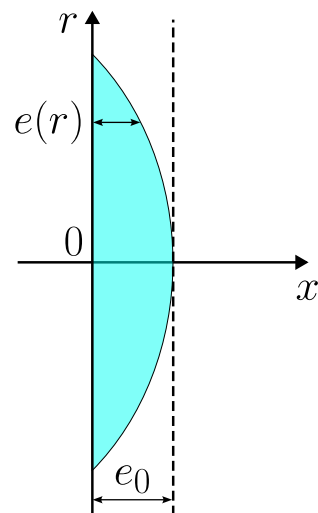


Figure 1: Profil d'épaisseur d'une lentille plan-convexe.

Exercice 4 : Solitons laser

Partie A : Approche qualitative : compensation dispersion/non-linéarités

1- Dispersion de la vitesse de groupe

On considère une impulsion lumineuse dont la représentation spectrale est un paquet d'ondes centré sur ω_0 de largeur $\Delta\omega$, se propageant dans un milieu d'indice n . Dans un milieu réel, l'indice n n'est a priori pas le même pour toutes les composantes fréquentielles : $n = n(\omega)$

- Rappeler la définition de la **vitesse de phase** v_p . Donner son expression pour une composante à la fréquence ω en fonction de ω et c et n .
- Rappeler la définition de la **vitesse de groupe** v_g . Donner son expression en fonction de $\beta_1 = \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0}$. Que vaut la vitesse de groupe dans le cas non dispersif ($\frac{dn}{d\omega} = 0$) ?
- On appelle **dispersion de la vitesse de groupe** (Group Velocity Dispersion, GVD) la quantité

$$\beta_2 = \left. \frac{d^2k}{d\omega^2} \right|_{\omega_0}$$

Quel est le lien entre β_2 et la vitesse de groupe ? Interpréter.

- On se place dans le cas où $\beta_2 > 0$ (dispersion normale). Comment se transforme une impulsion dans un tel milieu ? Et si $\beta_2 < 0$ (dispersion anormale) ?
- En déduire que dans tous les cas une GVD non nulle tend à élargir temporellement une impulsion.

2- Automodulation de phase

Dans cette question on ne considère plus la dispersion mais on se place un milieu présentant une non-linéarité de type Kerr, c'est à dire pour lequel $n = n_0 + n_2 I$ où I est l'intensité de l'impulsion et $n_2 > 0$.

- Sois une composante monochromatique de l'impulsion représentée par $E(z, t) = E_0 e^{i\phi(z, t)} = E_0 e^{i(\omega_0 t - kz)}$ avec $k = \frac{\omega_0}{c} n$. Donner l'expression de la phase instantanée $\phi(z, t)$, en faisant notamment apparaître l'intensité I .
- En déduire l'expression de la fréquence instantanée $\omega = \frac{\partial\phi}{\partial t}$. Elle est identique au cas linéaire ? On appelle ce phénomène l'**automodulation de phase** (Self Phase Modulation, SPM).
- Représenter le profil d'intensité en fonction du temps $I(t)$, en identifiant le front avant et arrière.
- Comment se transforme spectralement une impulsion dans un tel milieu ?
- En déduire que la présence d'une non-linéarité Kerr tend à compresser temporellement une impulsion.

3- À votre avis, quel peut être l'intérêt de placer dans une cavité laser à la fois des composants dispersifs et non-linéaires ? Comment doit-être la dispersion pour que le procédé soit efficace ?

Partie B : Équation de Schrödinger non-linéaire

On considère dans cette partie une impulsion lumineuse centrée sur la fréquence ω_0 dont le champ électrique (polarisé rectilignement) s'écrit

$$E(z, t) = K A(z, t) E_0 e^{i\omega_0 t - k_0 z}$$

avec $K = 1/\sqrt{n_0 \varepsilon_0 \mathcal{A}_{\text{eff}}}$ et \mathcal{A}_{eff} l'aire effective occupée par le faisceau (pour un faisceau gaussien de rayon w , $\mathcal{A}_{\text{eff}} = \pi w^2$). Cette impulsion se propage dans un milieu comportant à la fois de la dispersion et une non-linéarité Kerr. On montre alors que l'équation régissant l'évolution de l'enveloppe est

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i \gamma |A|^2 A \quad (1)$$

Où β_1 et β_2 sont les mêmes que définis précédemment et $\gamma = \frac{n_2 \omega_0}{c \mathcal{A}_{\text{eff}}}$. Le coefficient α rend compte des pertes subies par le faisceau.

On considèrera ici le cas sans perte d'énergie ($\alpha = 0$) avec dispersion anormale ($\beta_2 < 0$).

- 1- À quelle vitesse V se déplace l'impulsion ? Appliquer le changement de variables

$$\begin{aligned} Z &= z \\ T &= t - z/V \end{aligned}$$

et montrer que l'équation 1 prend la forme

$$i \frac{\partial A}{\partial Z} + \frac{|\beta_2|}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \gamma |A|^2 A = 0 \quad (2)$$

- 2- L'équation obtenue est appelée **équation de Schrödinger non-linéaire** (NLS). Pourquoi à votre avis ? En vous appuyant sur cette analogie, à quoi peuvent ressembler ses solutions selon vous ?
- 3- Montrer que la fonction

$$A(Z, T) = \frac{A_0}{\cosh(t/\tau)} e^{iZ/L}$$

est solution de 2, et en déduire notamment une relation entre τ et A_0 .

- 4- Montrer que la largeur temporelle à mi-hauteur de l'impulsion vérifie $\Delta\tau_p = 1.76 \tau$
- 5- Quelle est l'unité de A ? En déduire la relation

$$\Delta\tau_p^2 = \frac{3.11}{\mathcal{P}_p} \frac{|\beta_2|}{\gamma}$$

où \mathcal{P}_p est la puissance de crête du faisceau.

- 6- Démontrer la relation

$$\Delta\tau_p = \frac{3.53}{\mathcal{E}} \frac{|\beta_2|}{\gamma}$$

où \mathcal{E} est l'énergie de l'impulsion.

7- L'approche précédente décrit bien la propagation d'un soliton dans un milieu homogène dispersif et non-linéaire (comme une fibre optique). En pratique en physique des lasers le milieu de propagation de la lumière varie, et l'obtention d'un soliton laser se fait en ajoutant dans la cavité des composants dispersifs (prismes, réseaux) et non-linéaires (cellules Kerr). La formule donnant la durée de l'impulsion est identique à cela près que

- la GVD β_2 est remplacée par le **décali de dispersion de groupe** (GDD) total sur un aller-retour, noté $\phi'' = \ell_D \beta_2$ où ℓ_D est la longueur optique des éléments dispersifs, et
- la constante de SPM γ est remplacée par le déphasage non-linéaire total sur un aller-retour par unité de puissance $\delta = \gamma \ell_{NL}$ où ℓ_{NL} est la longueur optique des éléments non-linéaires.

La formule devient donc

$$\Delta\tau_p = \frac{3.53}{\mathcal{E}} \frac{|\phi''|}{\delta}.$$

En déduire la durée de l'impulsion soliton obtenue avec un laser Titane-Saphir pour lequel $\phi'' = -200$ fs, $\delta \approx 10^{-6} \text{ W}^{-1}$ et $E \approx 50$ nJ.

Données :

$$\frac{d}{dx} \tanh(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$