LASER

EIDD 2A GP
2024-2025

TD 6
Le laser dynamique (1) : Q-switching

CORRECTION

Exercice 1 : Propriétés d'une impulsion générée par Q-switching

On étudie la dynamique d'un laser à quatre niveaux pompé continûment au cours d'un processus de Q-switching. En Fig. 1 sont représentés au cours du temps l'évolution des pertes totales en cavité L (paramètre contrôlé par l'opérateur) ainsi que de l'inversion de population D et du nombre de photons en cavité ϕ (réponse du laser). On cherche à dans cet exercice à caractériser l'impulsion lumineuse générée. On rappelle les équations d'évolution de D et ϕ :

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = W_p(N - D) - BD\phi - \frac{D}{\tau} \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = BDV_\mathrm{a}\phi - \frac{\phi}{\tau_c} \tag{2}$$

avec W_p le taux de pompe (supposé constant), N la population totale d'atomes, $B = \sigma c/V_\mathrm{a}$ le taux d'émission stimulée/absorption, τ le temps de vie (temps de fluorescence) du niveau de pompe et τ_c le temps de vie d'un photon en cavité.

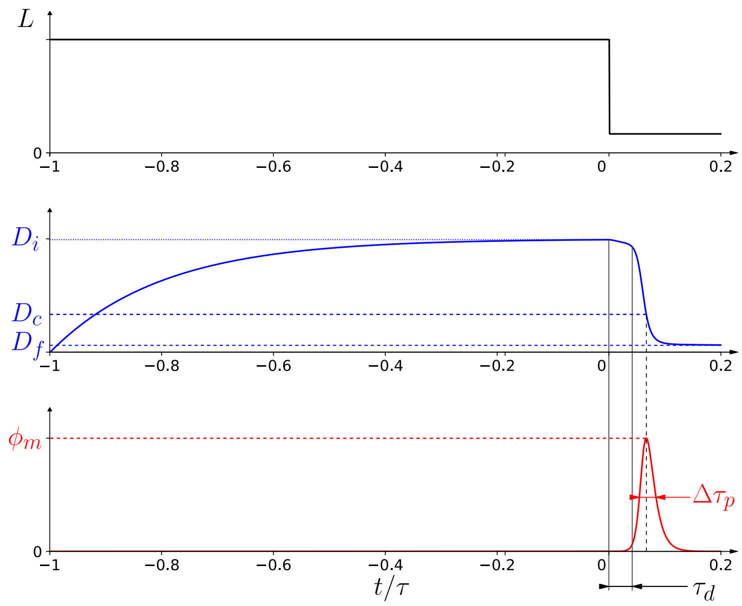

Figure 1: Dynamique d'un laser lors du procédé de Q-switching. En haut/milieu/bas : les pertes L, d'inversion de population D et le nombre de photons ϕ.

Aux temps $t < 0$, on pompe le laser jusqu'à ce que celui-ci atteigne sa valeur d'inversion de population stationnaire D_i. On suppose les pertes suffisamment élevées pour que D_i soit en dessus de D_c, l'inversion de population critique pour le taux de perte normal. À $t = 0$ on abaisse rapidement les pertes de la cavité (Q-switching). On pourra faire l'hypothèse que la dynamique du laser lors de ce processus est rapide par rapport au temps de fluorescence τ et au temps de pompage $1/W_p$.

1- A l'aide de l'équation (1), calculer D_i l'inversion de population stationnaire du laser à $t=0$ au moment du Q-switching.
Il s'agit de l'inversion de population maximale atteignable avec ce taux de pompe (l'émission laser n'étant pas présente, elle ne limite pas D à D_c car pour $t<0$, on a $D_c > D_m$) d'où

$$D_i = D_m = \frac{W_p}{W_p + 1/\tau} N$$

2- En appliquant les hypothèses proposées, montrez qu'on peut mettre les équations sous la forme

$$\dot{D} = -\frac{\phi}{V_a \tau_c} \frac{D}{D_c} \tag{3}$$

$$\dot{\phi} = \frac{\phi}{\tau_c}\left(\frac{D}{D_c} - 1\right) \tag{4}$$

Où l'on explicitera et donnera une interprétation physique de D_c
On a $\dot{D} \approx -BD\phi$ d'après les hypothèses et $D_c = 1/\tau_c B V_a$ est l'inversion de population critique, c'est à dire la valeur que prendrait D pour un laser stationnaire. On a bien $D_c \propto 1/\tau_c \propto P$ les pertes, plus on a de pertes lumineuses plus D_c est élevé (donc quand on switch en augmentant Q on diminue bien D_c).

3- Juste après la commutation des pertes et jusqu'à ce que ϕ prenne une valeur appréciable (par exemple $\phi_m/10$), on peut raisonnablement supposer que l'inversion de population reste constante. En déduire l'expression de $\phi(t)$ (on supposera qu'à $t = 0^+$ un seul photon est présent dans la cavité).
Si $D = D_i = C^{ste}$ alors

$$\phi(t) = 1\, e^{-(D/D_c - 1)t/\tau}$$

4- Déterminer l'expression du temps de délai τ_d défini par $\phi(\tau_d) = \phi_m/10$, en fonction notamment du **taux d'inversion** $r = D_i/D_c$. (bonus) En déduire une contrainte sur le temps de commutation $\Delta\tau_{\text{switch}}$ pour que la modélisation effectuée ici soit adéquate.
On inverse la relation précédente

$$\tau_d = \frac{\tau_c}{r-1} \ln(\phi_m/10)$$

Le critère est $\Delta\tau_{\text{switch}} < \tau_d$: le switch doit être complètement effectué au moment où l'impulsion commence à se former pour que ce soit optimal (mais avant que le pulse n'aparaisse ce n'est pas critique).

5- Montrer que le nombre de photons en cavité pendant l'impulsion atteint son maximum lorsque $D = D_c$.
La condition $\dot{\phi} = 0$, $\phi \neq 0$ impose $D = D_c$.

6- En prenant le rapport des équations (4) et (3), exprimer ϕ en fonction de D, D_i et D_c.
Le rapport des équations donne $\frac{1}{V_a}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}D} = \left(\frac{D_c}{D} - 1\right)$ soit $\frac{\phi - 1}{V_a} = D_c \ln(D/D_i) - D + D_i$

7- En déduire l'expression ϕ_m du nombre maximum de photons en cavité pendant l'impulsion. Montrer qu'elle prend la forme

$$\phi_m = V_a D_c (r - 1 - \ln r). \tag{5}$$

où r est le taux d'inversion précédemment défini.
On prend $D = D_c$ pour se placer au max, et on écrit que $\phi - 1 \approx 1$.

On rappelle l'expression de la puissance de sortie d'un laser :

$$\mathcal{P} = T\frac{c}{2\ell}h\nu\phi \tag{6}$$

avec T la transmittance du miroir de sortie de la cavité, c la vitesse de la lumière dans le vide, ℓ la longueur optique de la cavité et $h\nu$ l'énergie d'un photon émis par le laser.

8- Donner l'expression de la puissance maximum $\mathcal{P}_\mathrm{m}$ de l'impulsion déclenchée par Q-switching.
On a $\mathcal{P}_\mathrm{m} = T\frac{c}{2\ell}h\nu\phi_m$

9- En intégrant membre à membre l'équation (4), calculer l'énergie totale de l'impulsion $\mathcal{E} = \int_0^\infty \mathcal{P}(t)dt$ et montrer qu'elle peut s'écrire :

$$\mathcal{E} = T\frac{c}{2\ell}h\nu\tau_c V_\mathrm{a}(D_i - D_f) \tag{7}$$

Où D_f est l'inversion de population finale dans la cavité, après la génération de l'impulsion. Donner une interprétation simple de la formule précédente.
Il faut injecter l'équation 3 pour écrire

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= -V_\mathrm{a}\dot{D} - \frac{\phi}{\tau_c} \\ \phi_\infty - \phi_0 &= V_\mathrm{a}(D_i - D_f) - \frac{1}{\tau_c}\int_0^\infty \phi\,\mathrm{d}t \\ \int_0^\infty \phi\,\mathrm{d}t &= V_\mathrm{a}\tau_c(D_i - D_f) \end{aligned}$$

car $\phi_0 = \phi_\infty = 0$. Or $E = \int_0^\infty \mathcal{P}\,\mathrm{d}t = T\frac{c}{2\ell}h\nu\int_0^\infty \phi\,\mathrm{d}t$, d'où le résultat.
En écrivant que le nombre de photons créés N_ϕ est simplement la différence d'inversion de population $D_i - D_f$ et que (cf TDs précédents) $\tau_c = \frac{2\ell}{c}\frac{1}{P}$ avec P les pertes, on peut réécrire

$$\mathcal{E} = \frac{T}{P}h\nu N_\phi$$

c'est à dire que l'énergie obtenue est l'énergie totale créée ($h\nu N_\phi$) fois le ratio des pertes utiles T sur les pertes totales P.

10- Déduire des expression de $\mathcal{P}_\mathrm{m}$ et $\mathcal{E}$ une expression approchée de $\Delta\tau_p$, la largeur temporelle de l'impulsion, en fonction du taux d'inversion $r = D_i/D_c$, du temps de vie en cavité τ_c et de la fraction de l'inversion utilisée $\eta_\mathcal{E} = \dfrac{D_i - D_f}{D_i}$. Interpréter cette dernière quantité.
On a

$$\begin{aligned} \Delta\tau_p &\approx \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{P}_\mathrm{m}} \\ &= \tau_c\frac{1}{r - 1 - \ln r}\frac{D_i - D_f}{D_c} \\ &= \tau_c\frac{r}{r - 1 - \ln r}\frac{D_i - D_f}{D_i}\frac{D_i}{D_c} \\ &= \tau_c\,\eta_\mathcal{E}\,\frac{r}{r - 1 - \ln r} \end{aligned}$$

11- Application numérique : Donner les caractéristiques (durée, puissance max, énergie) d'une impulsion Q-switchée dans un laser Nd:YAG ayant les propriétés suivantes : section efficace $\sigma = 1.25 \cdot 10^{-19}$ cm^{-2}, temps de vie en cavité $\tau_c = 10$ ns, temps de fluorescence $\tau = 355$ μs, longueur d'onde d'émission $\lambda = 1.064$ μm, volume de mode $V_\mathrm{a} = 7.85$ cm^3, longueur de cavité $\ell = 15$ cm, transmittance du miroir de sortie $T = 0.03$. On prendra $r = 10$ et on supposera $D_f \ll D_i$.

On a

- Durée : $D_f \ll D_i$ donc $\eta_\mathcal{E} \approx 1$. On applique la formule et on trouve $\Delta\tau_p = \tau_c \frac{r}{r-1-\ln r} = 15$ ns. C'est petit : 15 milliardièmes de secondes !
- Puissance : On calcule $V_\mathrm{a} D_c = 1/B\tau_c = V/\sigma c \tau_c = 2.1 \cdot 10^{17}$. On en déduit $\mathcal{P}_\mathrm{p} = T\frac{c^2}{2\ell\lambda} h V_\mathrm{a} D_c (r - 1 - \ln r) = 24$ MW. C'est énorme ! 24 MW, c'est un champ d'éoliennes par grand vent, c'est la consommation instantanée de toute la ville de Saint-Étienne (170 k habitants à 1.3 MWh / an, soit 150 W par habitant en moyenne).
- Energie : On en déduit $\mathcal{E} = T\frac{c^2}{2\ell\lambda} h \tau_c r V_\mathrm{a} D_c = \frac{T}{P}\frac{hc}{\lambda} r V_\mathrm{a} D_c = \mathcal{P}_m \Delta\tau_p = 350$ mJ. C'est pas mal, ça correspond à l'énergie d'une balle rebondissante (300g) lachée d'une hauteur de 10 cm. C'est une énergie macroscopique pour un truc qui ne dure de quelques milliardièmes de secondes !

On peut aussi trouver les pertes totales, qui valent $P = 0.1$.