

LASER

EIDD 2A GP

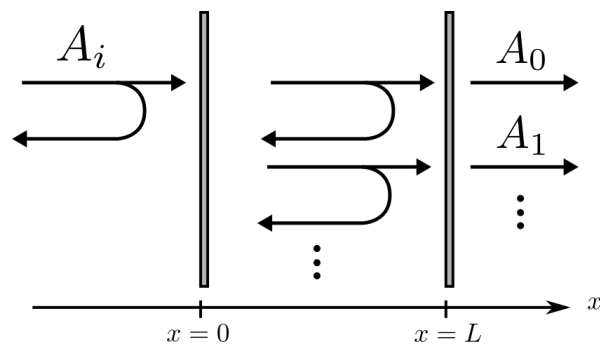
2024-2025

TD 5

Cavités

CORRECTION

Exercice 1 : Résonateur de Fabry–Pérot



Un résonateur de Fabry–Pérot est constitué de deux miroirs parallèles délimitant un milieu d'indice n . Pour simplifier, on considérera le milieu non absorbant et les deux miroirs identiques. On appellera respectivement r et t les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude associés à chacune des deux interfaces, et $R = r^2$ et $T = t^2$ les coefficients de réflexion et de transmission en intensité, avec $R + T = 1$.

On considère une onde plane monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 et de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}_x$, incidente sur le miroir de gauche (miroir d'entrée). On appelle A_i l'amplitude (complexe) de l'onde incidente et $I_i = |A_i|^2$ l'intensité lumineuse correspondante. On se propose de calculer l'intensité lumineuse I_t transmise par le résonateur. Pour cela, il faudra tenir compte du phénomène d'interférence entre les ondes multiples réfléchies par les deux miroirs constituant le résonateur.

1- Transmittance de la cavité

- a) Écrire l'expression de l'amplitude transmise A_0 après être passée dans le résonateur.
 $A_0 = t^2 A_i = T A_i$
- b) Écrire en fonction de λ_0 le déphasage ϕ entre une onde qui arrive sur le miroir de sortie sans avoir subi aucune réflexion et une onde qui arrive après un aller-retour dans le résonateur. En déduire l'expression de l'amplitude transmise A_1 après un aller retour dans le résonateur.

$$\phi = 2nkL ; A_1 = A_0 R e^{i\phi} \text{ avec } R = r^2$$

- c) Écrire l'amplitude de l'onde transmise après k allers retours dans le résonateur.
 $A_k = A_0 (R e^{i\phi})^k$
- d) En déduire l'expression de l'amplitude totale transmise A_t en fonction de A_i , R , T et ϕ .
 On somme toutes les contributions de toutes les ondes sortantes

$$\begin{aligned} A_t &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \\ &= A_i T \sum_{k=0}^{\infty} (R e^{i\phi})^k \\ &= A_i T \frac{1}{1 - R e^{i\phi}} \end{aligned}$$

- e) Montrer que l'on peut mettre l'intensité transmise I_t sous la forme :

$$I_t = \frac{I_i}{1 + m \sin^2(\phi/2)}. \quad (1)$$

et donner l'expression du paramètre m en fonction de R et de T

On écrit

$$\begin{aligned} I_t &= |A_t|^2 \\ &= T^2 I_i \frac{1}{|1 - R e^{i\phi}|^2} \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} |1 - R e^{i\phi}|^2 &= (1 - R e^{i\phi})(1 - R e^{-i\phi}) \\ &= 1 + R^2 - R(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \\ &= (1 - R)^2 + 2R - 2R \cos \phi \\ &= T^2 + 2R - 2R(1 - 2 \sin^2(\phi/2)) \\ &= T^2(1 + 4R/T^2 \sin^2(\phi/2)) \end{aligned}$$

d'où le résultat, avec $m = 4R/T^2$. Il s'agit de la fonction d'Airy.

- 2- Calculer le coefficient m pour 3 valeurs de réflectivité $R = 50 \%$, 90% et 99% . En déduire que l'approximation $m \gg 1$ est bien vérifiée pour des miroirs de laboratoire.
 On trouve $m = 8, 360, 40000$. En labo on fait facilement $R > 99.9 \%$.

Pour la suite de l'exercice, on considérera que les miroirs sont très réfléchissants ($R \approx 1$).

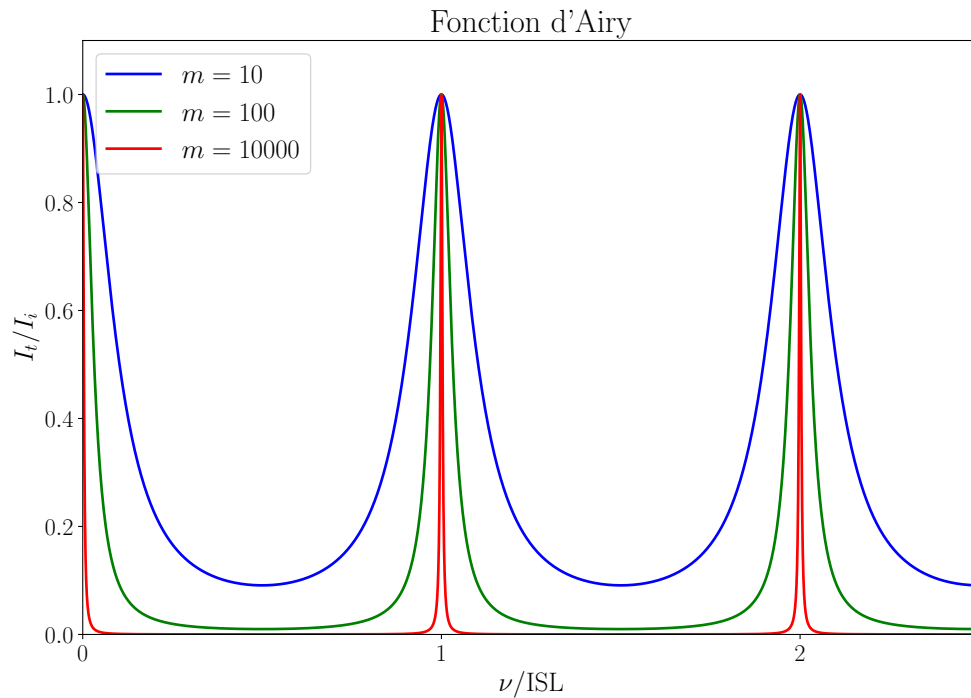
3- Intervalle spectral libre et finesse

- a) Montrer que la transmittance de la cavité I_t/I_i est maximum pour des fréquences $\nu_N = N\Delta\nu_L$, avec N un entier et $\Delta\nu_L$ l'**intervalle spectral libre** (ISL) — en anglais FSR, *Free Spectral Range* —, dont on donnera l'expression.

$$\Delta\nu_L = c/2nL$$

- b) Tracer l'allure de I_t/I_i , en fonction de la fréquence normalisée à l'ISL pour deux valeurs différentes du coefficient de réflectivité R . Commenter.

On a dans ce cas $\phi/2 = \pi\nu/ISL$ donc on a bien des résonances quand $\nu = N \cdot ISL$



- c) Trouver la **largeur à mi hauteur** — en anglais FWHM, *Full Width at Half Max* — des pics de résonances $\delta\nu_L$.

Il faut résoudre $1 + m \sin^2(nkL) = 2$ soit $\nu = N\Delta\nu_L \pm c/2\pi nL\sqrt{m}$ d'où $\delta\nu_L = c/\pi nL\sqrt{m}\Delta$.
En anglais on dit FWHM.

- d) En déduire la **finesse** \mathcal{F} de la cavité, définie par

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu_L}{\delta\nu_L}$$

en fonction de m , puis de T .

$$\mathcal{F} = \pi\sqrt{m}/2 \approx \pi/T$$

4- Facteur de qualité

- a) Si W est l'énergie totale stockée dans la cavité, justifier qu'en un temps $\tau = 2nL/c$ (comment interpréter ce temps ?) l'énergie perdue par la cavité est $\Delta W = 2TW$.

Δt est le temps d'un aller retour dans la cavité pour la lumière. Pendant ce temps, toute la lumière a interagi avec les miroirs, et il y a deux interfaces.

- b) En déduire la quantité δW d'énergie perdue pendant une période de l'onde lumineuse de fréquence ν .

On a $\delta W = \frac{T_0}{\tau} \Delta W = \frac{1}{\nu\tau} \Delta W$ avec T_0 la période

c) En déduire l'expression du **facteur de qualité**

$$Q = 2\pi \frac{W}{\delta W}$$

de la cavité en fonction de L , λ et T .

$$Q = 2\pi nL/\lambda T$$

d) Quel est le lien entre facteur de qualité et finesse ? On fera intervenir la fréquence de l'onde lumineuse et l'intervalle spectral libre

$$Q = 2nL\mathcal{F}/\lambda = \mathcal{F} \frac{\epsilon \backslash \mathcal{L} / \lambda}{\nu} = \mathcal{F} \frac{\text{ISL}}{\text{freq}}$$

(À ne pas forcément dire aux élèves) cette interprétation du facteur de qualité est tj bonne, par ex avec un système mécanique

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$$

Alors on a l'énergie du système $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$, par équirépartition / viriel, ces deux sont égales donc $E = 2 \cdot \frac{1}{2}m \langle \dot{x}^2 \rangle = m \langle \dot{x}^2 \rangle$

La puissance dissipée instantanée est (en valeur absolue) $\mathcal{P} = |-\lambda\dot{x}| \cdot \dot{x} = \lambda\dot{x}^2$

donc la puissance dissipée sur une période T_0 est en gros (pour un bon facteur de qualité) $T_0 \cdot \lambda \langle \dot{x}^2 \rangle$

ainsi

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi \frac{m \langle \dot{x}^2 \rangle}{T_0 \lambda \langle \dot{x}^2 \rangle} \\ &= 2\pi \frac{m}{2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \lambda} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \\ \text{d'où} \quad Q &= \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{m}{k}} = \omega_0/\lambda \end{aligned}$$

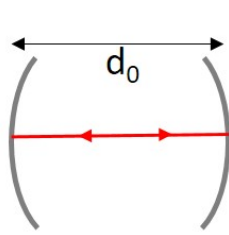
Ce qui est la bonne réponse. Ca marche aussi avec un circuit électrique, etc etc.

5- (Facultatif) Donner l'expression de l'intensité du champ intracavité à la résonance en fonction de la finesse et de l'intensité incidente. Commenter.

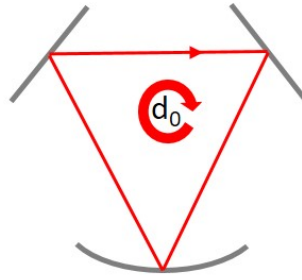
L'intensité de l'onde propageante intracavité est $I_{\text{intra}}^{\text{prop}} = I_t/T$ et celle de l'onde contrapropageante $I_{\text{intra}}^{\text{contra}} = RI_{\text{intra}}^{\text{prop}} = RI_t/T$ par conservation de l'énergie, d'où l'intensité optique totale intracavité $I_{\text{intra}}^{\text{tot}} = (1+R)/TI_t$, on en déduit à la résonance $I_{\text{intra}}^{\text{tot}} = 2I_i/T \approx 2I_i\mathcal{F}/\pi$. Grand champ intracavité → Pb de champs E intenses : comportements NL, échauffement des matériaux donc pb de la tenue thermique... Avoir un bon facteur de qualité a un prix !

NE PAS OUBLIER DE FAIRE LE LIEN AVEC LE TEMPS DE VIE DU PHOTON EN CAVITE vu au TD 2 et 3. Si Δt est le temps d'aller retour en cavité, $\tau_c = \Delta t/\text{pertes} = \Delta t/T = Q/\omega = \Delta t\mathcal{F}/\pi$ avec $\omega = 2\pi\nu$

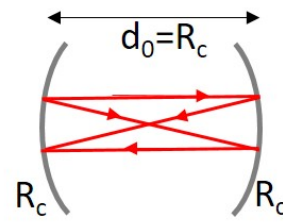
Exercice 2 : Types de cavités



Linéaire



En anneau



Confocale

Pour chacune des cavités présentées ci dessus, donner le temps de trajet d'un rayon lumineux, l'intervalle spectral libre correspondant et expliquez selon vous quel est l'intérêt d'utiliser cette cavité.

- Cavité linéaire de longueur d_0 :
 - $\Delta t = 2d_0/c$ (aller-retour)
 - $\text{ISL} = 1/\Delta t = c/2d_0$
 - Intérêt : Besoin que de 2 miroirs.
- Cavité en anneau de longueur d_0 :
 - $\Delta t = d_0/c$ (aller simple)
 - $\text{ISL} = 1/\Delta t = c/d_0$
 - Intérêt : On peut la rendre monodirectionnelle (par ex avec une diode optique), on peut mettre des optiques qui ne seront traversées qu'une fois par trajet et dans un seul sens.
- Cavité confocale $d_0 = R_c$:
 - $\Delta t = 4d_0/c$ (2 aller-retour pour rebrancher, cf dessin)
 - $\text{ISL} = 1/\Delta t = c/4d_0$
 - Intérêt : analytique

Le lien entre les trajets en dessin (opt géo) et la correspondance pour un photon laser (opt gaussienne) est critiqué par certains et n'est pas évidente si on ne se souvient pas que les 2 sont traitables par le même formalisme ABCD et notamment les mêmes matrices : Si un rayon géométrique (ne) se superpose (pas) à lui même alors ce sera aussi le cas pour un faisceau gaussien, et vice versa.