LASER

EIDD 2A GP
2024-2025

TD 3
Faisceaux gaussien

CORRECTION

Exercice 1 : Structure du faisceau gaussien

On s'intéresse au mode TEM_{00} d'un faisceau gaussien, pour lequel l'amplitude du champ électrique $E(r,z,t) = \varepsilon(r,z)e^{i(kz-\omega t)}$ est modulée par

$$\varepsilon(r,z) = A_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{i\varphi(z)} e^{i\frac{kr^2}{2R(z)}} e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}$$

avec $\quad w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{z-z_0}{z_R}\right)^2}$; $R(z) = \frac{{z_R}^2}{z-z_0} + z - z_0$ et $\tan\varphi(z) = -\frac{z-z_0}{z_R}$

Interprétation de chacun des termes :

- A_0 est juste un terme d'amplitude
- le terme w_0/w rend compte de la divergence conique de l'amplitude l'onde à grande distance (comme pour une onde sphérique) : puisque w est le rayon ce terme correspond à une modulation de l'amplitude "en $1/r$" qui donnera à la question 5 la conservation du flux d'énergie
- $e^{i\varphi}$ est un terme de phase. Ses variations traduisent l'évolution locale de la vitesse de phase.
- $e^{ikr^2/2R}$ est le terme de courbure, il donne la courbure des surfaces d'onde. On peut le rapprocher du terme équivalent pour une onde sphérique loin de l'origine

$$\begin{aligned} E &= E_0 \frac{R_0}{R} e^{i(kR-\omega t)} \\ &= E_0 e^{i(kz\sqrt{1+r^2/z^2}-\omega t)} \\ &\approx E_0 e^{i(kz-\omega t)} e^{ir^2/2R} \end{aligned}$$

  avec $R = \sqrt{z^2+r^2} \approx z$ le rayon sphérique et r le rayon cylindrique dans le plan transverse.
- e^{-r^2/w^2} est LE terme à retenir, c'est lui qui donne le nom au faisceau (gaussien). Il traduit l'extension spatiale transverse limitée en intensité du faisceau

1- Rappeler le nom des constantes w_0 et z_R ainsi que la relation mathématique qui les relie. En donner une interprétation qualitative et estimer leur valeur pour un laser de TP.
$\theta = w_0/z_R = \lambda/\pi w_0$. Laser de TP : $\lambda \sim 633$ nm, $w_0 \sim 1$ mm, $z_R \sim 5$ m, $\theta \sim 0.2$ mrad.

2- La fonction $w(z)$ est appelée **rayon du faisceau**. Justifier cette appellation, puis tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction. Commenter.
Quantifie l'extension transverse du faisceau.
Il y a un minimum, le **waist**, à $z = z_0$. Près du waist, w est constant au premier ordre. Loin du waist, w croit linéairement : $w \propto w_0 z/z_R$. On en déduit l'angle d'ouverture du faisceau $\theta = w/z = w_0/z_R$.

3- La fonction $R(z)$ est appelée **rayon de courbure du faisceau**. Justifier cette appellation, puis tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction. Commenter.
Quantifie la courbure des isophases.
Proche de z_0, R diverge : les surfaces d'onde sont des plans, on a une OPPH. Loin de z_0, R croît linéairement : $R \sim z$, on a une onde sphérique.

4- La fonction $\varphi(z)$ est appelée **phase de Gouy**. Comment interpréter cette quantité ? Tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction. Commenter.
Rend compte d'un déphasage de π en passant par un point de convergence et de la vitesse de phase supraluminique au niveau du waist.
On a un écart de π entre $-\infty$ et $+\infty$, et une pente négative en 0 (modification de la vitesse de phase effective).

5- La puissance optique passant à travers une surface est donnée par $\mathcal{P} = \iint_{(S)} \left\langle \vec{\Pi} \right\rangle \cdot \mathrm{d}\vec{S}$, où $\vec{\Pi}$ est le vecteur de Poynting, dont on rappelle l'expression : $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$.

a) En utilisant l'équation de Maxwell–Faraday, montrer que dans le vide on peut écrire le vecteur de Poynting sous la forme $\vec{\Pi} = \epsilon_0 c \vec{E}^2 \vec{u}_z$ avec ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide.

On utilise Maxwell faraday ($\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$)qui donne pour une onde TEM dans le vide (1ère approx du faisceau gaussien) : $\vec{k} \times \vec{E} = \omega \vec{B}$ d'où $\vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c}\vec{E}^2 \vec{u}_z$ et donc le résultat puisque $\frac{1}{\mu_0 c} = \epsilon_0 c$.

b) En déduire que dans le cas d'un faisceau gaussien, on peut exprimer $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle$ sous la forme $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 c A(r,z)^2 \vec{u}_z$ avec $A(r,z)$ une fonction réelle que l'on précisera.

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{\Pi} \right\rangle \cdot \vec{u}_z &= \epsilon_0 c \left\langle |E|^2 \right\rangle && (1) \\ &= \epsilon_0 c |\varepsilon|^2 \left\langle \cos^2(kz - \omega t) \right\rangle && (2) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 c |\varepsilon|^2 && (3) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_0 c A^2 \quad \text{avec} \quad A(r,z) = |\varepsilon| = \frac{w_0}{w(z)} A_0 e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}} && (4) \end{aligned}$$

c) En déduire que, dans un plan de côte z donnée, la puissance traversant une section circulaire de rayon ρ centrée sur l'axe de propagation est

$$\mathcal{P}(\rho) = \mathcal{P}_0 \int_0^{2\rho^2/w^2} e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

où l'expression de $\mathcal{P}_0$ est à déterminer.
$\mathcal{P}_0 = \frac{\pi}{4}\epsilon_0 c {A_0}^2 {w_0}^2$, il faut faire de changement de variable $u = 2r^2/w^2$ qui donne $\mathrm{d}u = 4r\,\mathrm{d}r\,/w^2$

d) Quelle est la puissance totale passant par un plan z donné ($\rho = \infty$) ? Commenter sa dépendance avec z.
C'est $\mathcal{P}_0$ et bien sûr ça ne dépend pas de z. On aurait pu s'en douter car $\Pi \propto 1/w^2$.

e) Quelle est la proportion de la puissance totale contenue dans un disque de rayon $w(z)$? En déduire une justification du terme 'rayon du faisceau' (puisque l'expansion spatiale du faisceau est théoriquement infinie).
On trouve $\mathcal{P}(w) = 0.86\mathcal{P}_0$, la majorité de l'énergie est donc comprise dans un disque de raison restreint : c'est l'extension spatiale énergétique effective du faisceau qui est limitée. $1 - 1/e^2 = 0.86$

Exercice 2 : Longueur d'onde et waist

1- Rappeler la relation entre waist, longueur d'onde et angle de divergence pour un faisceau gaussien.
$\theta = w_0/z_R = \lambda/\pi w_0$

2- Quel est l'angle de divergence maximal envisageable ? En déduire le waist minimum atteignable par un faisceau gaussien de longueur d'onde λ.
Cette question est pour faire le lien entre w_0 et λ sans introduire la notion de nombre d'ouverture. Au max, $\theta = \pi/2$, d'où $w_0 = 2\lambda/\pi^2$

3- Les lecteurs CD utilisaient un laser infrarouge de longueur d'onde $\lambda = 780$ nm, les lecteurs DVD un laser rouge $\lambda = 650$ nm et les lecteurs Blu-ray un laser violet $\lambda = 405$ nm. Commenter.

4- La profondeur du sillon est de 190 nm pour un CD, 160 nm pour un DVD et 100 nm pour un disque Blu-Ray. Qu'est ce qui, à votre avis, justifie ces choix technologiques ?
La profondeur est $\lambda/4$ pour avoir des interférences destructives. Donc pas de lumière quand le faisceau tombe dans un puits (0) alors que sur une crête on voit une réflexion (1).

Exercice 3 : Profil elliptique du faisceau

Un laser à semiconducteur possède la particularité d'émettre un faisceau gaussien avec un profil transverse elliptique : dans le plan du *waist* le faisceau possède un front d'onde plan mais deux *waist* différents $w_{0,x}$ et $w_{0,y}$ selon les deux directions x et y du plan transverse.

1- Montrer qualitativement qu'il existe une distance d_0 pour laquelle le faisceau redevient circulaire puis qu'au-delà de d_0 l'ellipticité du faisceau s'inverse (le grand axe prend la place du petit axe de l'ellipse et inversement).
Le faisceau de plus petit waist a une plus grande divergence et vice-versa, nécessairement les courbes se croisent.

2- Déterminer d_0 en fonction de $z_{R,x}$ et $z_{R,y}$
$w_{xy} = w_{0,xy}\sqrt{1 + (z/z_{R,xy})^2}$ d'où

$$w_x = w_y \Leftrightarrow \sqrt{z_x \frac{\pi}{\lambda}} \sqrt{1 + \left(\frac{d_0}{z_x}\right)^2} = \sqrt{z_y \frac{\pi}{\lambda}} \sqrt{1 + \left(\frac{d_0}{z_y}\right)^2}$$

$$z_x - z_y = {d_0}^2 \left(\frac{1}{z_y} - \frac{1}{z_x}\right)$$

$$\text{d'où} \quad d_0 = \sqrt{z_{R,x} z_{R,y}}$$

3- Evaluer numériquement d_0 pour un laser à semiconducteur typique: $\lambda = 800$ nm, $w_{0y} = 1\ \mu$m et $w_{0x} = 3\ \mu$m.
$d_0 = 12\ \mu$m

Exercice 4 : Télémétrie laser Terre-Lune

La Lune est l'unique satellite naturel de la Terre. Son rayon est d'à peu près un tiers de celui de la Terre mais sa masse volumique est plus faible. Elle suit une orbite képlerienne de demi grand axe 384 399 km et d'excentricité 0.05. La rotation propre de la Lune est synchrone avec la Terre, elle lui montre donc constamment la même face. Les mesures les plus récentes montrent qu'elle s'éloigne de la Terre à la vitesse de 3.8 cm/an.

La mesure de la distance Terre-Lune la plus précise dont on dispose est faite en envoyant un faisceau laser sur des réflecteurs placés sur la Lune et en mesurant le temps entre l'envoi et la réception d'une impulsion.

Le laser utilisé est un Nd:YAG pompé à 20 Hz par une lampe flash, émettant une radiation à 1.064 μm doublé en fréquence à 532 nm par un cristal non-linéaire efficace à 50 %. Chaque impulsion porte une énergie de 115 mJ et dure 90 ps. Le waist initial du faisceau est de 7 mm, il est agrandi par un système de lentilles à 16 mm puis par un télescope d'ouverture 3.5 m pour atteindre une valeur de 70 cm.

Sur la lune, on dispose de plusieurs systèmes de réflecteurs, qui consistent en des rangées de prismes en coins de cube. Les réflecteurs américains consistent en des rangées de cubes de 3.8 cm de diamètre (300 pour le réflecteur de la mission Apollo 15, soit une surface couverte d'à peu près 1 m^2) et les réflecteurs russes consistent en 14 cubes de 11 cm d'arêtes fabriqués en France (mission Lunokhod 1 et 2), soit une surface couverte d'à peu près 0.5 m^2.

Sur Terre, le signal est récupéré l'aide d'un télescope de 1.5 m de diamètre, souvent à l'Observatoire de la Côte d'Azur. La détection se fait à l'aide d'une photodiode à avalanche précédée d'un filtre interférentiel très fin (0.1 nm).

1- Estimer l'angle de divergence du faisceau initial, puis celle du faisceau partant pour la Lune. À votre avis, quel est l'intérêt d'agrandir le waist ? Comment s'apelle cette opération ?
On passe de 24 à 0.24 μrad. Ce faisant, la tache sur la Lune passe de 9 km à 900 m de rayon ! Il s'agit de collimater le faisceau.

2- En réalité, à cause des perturbations atmosphériques, l'angle de divergence est plutôt de l'ordre d'une seconde d'arc (5 μrad). En déduire l'aire de la surface de la Lune éclairée par le laser.
Cercle de 1.9 km de rayon : 10^7 m^2.

3- On considère que le laser vise le rover d'Apollo 15. Quelle est la proportion d'énergie lumineuse renvoyée ?
$1 \cdot 10^{-8}$.

4- Quel est l'angle de divergence du faisceau lors du trajet Lune-Terre ? Vaut-il mieux utiliser les réflecteurs américains ou russes ?
Dicté par la diffraction : 14 μrad. Les russes ont une plus petite surface mais de plus grands cubes, qui diffractent donc moins... En pratique, le meilleur signal est renvoyé par Apollo 15, puis les rover russes, puis les autres missions Apollo (qui n'ont que 100 réflecteurs au lieu de 300).

5- En déduire la taille de l'aire éclairée en retour sur la Terre et la proportion d'énergie lumineuse captée.
5 km de rayon soit une aire de 10^8 m^2. Au total, la proportion utile est de 10^{-15}.

6- En prenant en compte les autres sources de pertes, la proportion d'énergie envoyée qui arrive sur le détecteur est de 10^{-18}. Estimer le nombre de photons présents dans une impulsion laser, et en déduire le nombre de photons arrivant sur le détecteur par impulsion.
Énergie d'un photon $h\nu = 3.7 \cdot 10^{-19}$ J, donc nb de photons dans une impulsion de 115 mJ : $3{\cdot}10^{17}$. Il arrive en moyenne 0.3 photons !

7- Pour chaque impulsion, les photodiodes ne sont ouvertes que sur une courte fenêtre (100 ns). Pourquoi ? Estimer le rapport signal/bruit de cette expérience.
Irradiation solaire sur la lune : 1.4 kW/m^2.

Albédo de la Lune : 7%, donc irradiation renvoyée : 100 W / m^2.

Renvoyée dans toutes les directions (onde sphérique, angle de divergence $\pi/2$, donc repartie uniformément sur $2\pi {d_{\mathrm{TL}}}^2 = 10^{18}$ m^2. Le télescope a une aire de 2 m^2, donc proportion qui arrive : $2 \cdot 10^{-18}$. Puissance arrivant sur le télescope sur Terre : $2 \cdot 10^{-16}$ W/m^2(lune).

3 Leviers : réduire les photons (filtrage spectral), réduire la zone observée (filtrage angulaire), réduire le temps d'observation (filtrage temporel).

Filtrage angulaire : la zone observée est un cercle de 1 km de rayon donc $3 \cdot 10^6$ m^2. Puissance optique totale arrivant sur le télescope : $6 \cdot 10^{-10}$ W

Filtrage spectral : Le spectre solaire est supposé uniforme sur 400 nm, le filtre a une sélectivité de 0.1 nm, d'où une proportion de lumière passante de $0.2/400 = 5 \cdot 10^{-4}$. Puissance optique passant le filtre : $3 \cdot 10^{-13}$.

Énergie d'un photon : $E = hc/\lambda = 3 \cdot 10^{-19}$, d'où nombre de photons passant le filtre : 10^6 par seconde.

Filtrage temporel : La photodiode n'est ouverte que pendant 100 ns (0.1 μs). En moyenne donc, seul 0.1 photon parasite passe.

Rapport signal sur bruit : $0.3/0.1 = 3$. l'OdG est bon.

Les données utilisées dans cet exercice sont extraites des articles T. W. Murphy Jr. et al, *PASP* (2008) et T W Murphy, *Rep. Prog. Phys.* (2013).