

LASER

EIDD 2A GP

2024-2025

TD 3

Faisceaux gaussien

Exercice 1 : Structure du faisceau gaussien

On s'intéresse au mode TEM₀₀ d'un faisceau gaussien, pour lequel l'amplitude du champ électrique $E(r, z, t) = \varepsilon(r, z)e^{i(kz - \omega t)}$ est modulée par

$$\varepsilon(r, z) = A_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{i\varphi(z)} e^{i\frac{kr^2}{2R(z)}} e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}$$

avec $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z - z_0}{z_R}\right)^2}$; $R(z) = \frac{z_R^2}{z - z_0} + z - z_0$ et $\tan \varphi(z) = -\frac{z - z_0}{z_R}$

- 1- Rappeler le nom des constantes w_0 et z_R ainsi que la relation mathématique qui les relie. En donner une interprétation qualitative et estimer leur valeur pour un laser de TP.
- 2- La fonction $w(z)$ est appelée **rayon du faisceau**. Justifier cette appellation, puis tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction. Commenter.
- 3- La fonction $R(z)$ est appelée **rayon de courbure du faisceau**. Justifier cette appellation, puis tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction. Commenter.
- 4- La fonction $\varphi(z)$ est appelée **phase de Gouy**. Comment interpréter cette quantité ? Tracer l'allure de la courbe représentative de cette fonction. Commenter.
- 5- La puissance optique passant à travers une surface est donnée par $\mathcal{P} = \iint_{(S)} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}$, où $\vec{\Pi}$ est le vecteur de Poynting, dont on rappelle l'expression : $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$.
 - a) En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday, montrer que dans le vide on peut écrire le vecteur de Poynting sous la forme $\vec{\Pi} = \epsilon_0 c \vec{E}^2 \vec{u}_z$ avec ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide.
 - b) En déduire que dans le cas d'un faisceau gaussien, on peut exprimer $\langle \vec{\Pi} \rangle$ sous la forme $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c A(r, z)^2 \vec{u}_z$ avec $A(r, z)$ une fonction réelle que l'on précisera.
 - c) En déduire que, dans un plan de côte z donnée, la puissance traversant une section circulaire de rayon ρ centrée sur l'axe de propagation est

$$\mathcal{P}(\rho) = \mathcal{P}_0 \int_0^{2\rho^2/w^2} e^{-u} du$$

où l'expression de \mathcal{P}_0 est à déterminer.

- d) Quelle est la puissance totale passant par un plan z donné ($\rho = \infty$) ? Commenter sa dépendance avec z .
- e) Quelle est la proportion de la puissance totale contenue dans un disque de rayon $w(z)$? En déduire une justification du terme 'rayon du faisceau' (puisque l'expansion spatiale du faisceau est théoriquement infinie).

Exercice 2 : Longueur d'onde et waist

- 1- Rappeler la relation entre waist, longueur d'onde et angle de divergence pour un faisceau gaussien.
- 2- Quel est l'angle de divergence maximal envisageable ? En déduire le waist minimum atteignable par un faisceau gaussien de longueur d'onde λ .
- 3- Les lecteurs CD utilisaient un laser infrarouge de longueur d'onde $\lambda = 780$ nm, les lecteurs DVD un laser rouge $\lambda = 650$ nm et les lecteurs Blu-ray un laser violet $\lambda = 405$ nm. Commenter.
- 4- La profondeur du sillon est de 190 nm pour un CD, 160 nm pour un DVD et 100 nm pour un disque Blu-Ray. Qu'est ce qui, à votre avis, justifie ces choix technologiques ?

Exercice 3 : Profil elliptique du faisceau

Un laser à semiconducteur possède la particularité d'émettre un faisceau gaussien avec un profil transverse elliptique : dans le plan du *waist* le faisceau possède un front d'onde plan mais deux *waist* différents $w_{0,x}$ et $w_{0,y}$ selon les deux directions x et y du plan transverse.

- 1- Montrer qualitativement qu'il existe une distance d_0 pour laquelle le faisceau redevient circulaire puis qu'au-delà de d_0 l'ellipticité du faisceau s'inverse (le grand axe prend la place du petit axe de l'ellipse et inversement).
- 2- Déterminer d_0 en fonction de $z_{R,x}$ et $z_{R,y}$
- 3- Evaluer numériquement d_0 pour un laser à semiconducteur typique: $\lambda = 800$ nm, $w_{0y} = 1$ μm et $w_{0x} = 3$ μm .

Exercice 4 : Télémétrie laser Terre-Lune

La Lune est l'unique satellite naturel de la Terre. Son rayon est d'à peu près un tiers de celui de la Terre mais sa masse volumique est plus faible. Elle suit une orbite képlérienne de demi grand axe 384 399 km et d'excentricité 0.05. La rotation propre de la Lune est synchrone avec la Terre, elle lui montre donc constamment la même face. Les mesures les plus récentes montrent qu'elle s'éloigne de la Terre à la vitesse de 3.8 cm/an.

La mesure de la distance Terre-Lune la plus précise dont on dispose est faite en envoyant un faisceau laser sur des réflecteurs placés sur la Lune et en mesurant le temps entre l'envoi et la réception d'une impulsion.

Le laser utilisé est un Nd:YAG pompé à 20 Hz par une lampe flash, émettant une radiation à 1.064 μm doublé en fréquence à 532 nm par un cristal non-linéaire efficace à 50 %. Chaque impulsion porte une énergie de 115 mJ et dure 90 ps. Le waist initial du faisceau est de 7 mm, il est agrandi par un système de lentilles à 16 mm puis par un télescope d'ouverture 3.5 m pour atteindre une valeur de 70 cm.

Sur la lune, on dispose de plusieurs systèmes de réflecteurs, qui consistent en des rangées de prismes en coins de cube. Les réflecteurs américains consistent en des rangées de cubes de 3.8 cm de diamètre (300 pour le réflecteur de la mission Apollo 15, soit une surface couverte d'à peu près 1 m²) et les réflecteurs russes consistent en 14 cubes de 11 cm d'arêtes fabriqués en France (mission Lunokhod 1 et 2), soit une surface couverte d'à peu près 0.5 m².

Sur Terre, le signal est récupéré l'aide d'un télescope de 1.5 m de diamètre, souvent à l'Observatoire de la Côte d'Azur. La détection se fait à l'aide d'une photodiode à avalanche précédée d'un filtre interférentiel très fin (0.1 nm).

- 1- Estimer l'angle de divergence du faisceau initial, puis celle du faisceau partant pour la Lune. À votre avis, quel est l'intérêt d'agrandir le waist ? Comment s'appelle cette opération ?
- 2- En réalité, à cause des perturbations atmosphériques, l'angle de divergence est plutôt de l'ordre d'une seconde d'arc (5 μrad). En déduire l'aire de la surface de la Lune éclairée par le laser.
- 3- On considère que le laser vise le rover d'Apollo 15. Quelle est la proportion d'énergie lumineuse renvoyée ?
- 4- Quel est l'angle de divergence du faisceau lors du trajet Lune-Terre ? Vaut-il mieux utiliser les réflecteurs américains ou russes ?
- 5- En déduire la taille de l'aire éclairée en retour sur la Terre et la proportion d'énergie lumineuse captée.
- 6- En prenant en compte les autres sources de pertes, la proportion d'énergie envoyée qui arrive sur le détecteur est de 10^{-18} . Estimer le nombre de photons présents dans une impulsion laser, et en déduire le nombre de photons arrivant sur le détecteur par impulsion.
- 7- Pour chaque impulsion, les photodiodes ne sont ouvertes que sur une courte fenêtre (100 ns). Pourquoi ? Estimer le rapport signal/bruit de cette expérience.

Les données utilisées dans cet exercice sont extraites des articles T. W. Murphy Jr. et al, *PASP* (2008) et T W Murphy, *Rep. Prog. Phys.* (2013).