LASER

EIDD 2A GP

2024-2025

TD 2
Équations bilan et régime continu

CORRECTION

Exercice 1 : Laser à 4 niveaux

On considère un laser à quatre niveaux, comme schématisé en fig. 2. Il est composé d'un niveau fondamental (0), depuis lequel les atomes sont envoyés à un état excité (3) instable. La transition laser se fait entre les niveaux 2 et 1, le niveau 2 étant métastable et le niveau 1 instable. On appelle N_i la **population** du niveau i, c'est-à-dire la densité d'atomes qui sont dans l'état i. Les phénomènes pris en compte dans la modélisation sont :

- Le pompage des atomes depuis le niveau fondamental (0) vers le niveau excité (3), avec un taux de pompage W_p
- La désexcitation non radiative du niveau excité (3) au niveau haut de la transition laser (2) qui se fait avec un taux γ_3
- La désexcitation par fluorescence (émission spontanée) du niveau haut (2) au niveau bas (1) de la transition laser qui se fait avec un taux γ_2
- La transition laser (absorption ou émission stimulée) entre les niveaux 2 et 1, avec un taux $B \cdot \phi$, ϕ étant le nombre de photons dans la cavité.
- La désexcitation non radiative du niveau bas de la transition laser (1) au niveau fondamental (0) qui se fait avec un taux γ_1

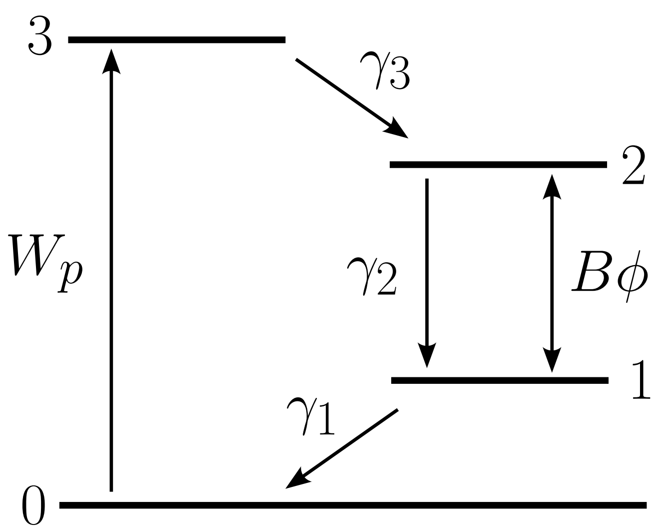

Figure 1: Schéma d'un laser basé sur un système à quatre niveaux.

Partie A : Évolution des populations

1- Écrire les quatre équations qui décrivent l'évolution des populations, $\dot{N}_i = \mathrm{d}N_i \,/\, \mathrm{d}t$, en fonction des données du problème.
Il s'agit de

$$\begin{aligned}
\dot{N}_3 &= W_p N_0 - \gamma_3 N_3 \\
\dot{N}_2 &= \gamma_3 N_3 - \gamma_2 N_2 - B\,\phi(N_2 - N_1) \\
\dot{N}_1 &= \gamma_2 N_2 + B\,\phi(N_2 - N_1) - \gamma_1 N_1 \\
\dot{N}_0 &= \gamma_1 N_1 - W_p N_0
\end{aligned}$$

2- On considère que l'état excité (3) est instable, i.e. la désexcitation $3 \to 2$ est rapide. Ceci peut se traduire par $\dot{N}_3 = 0$. En déduire une expression de N_3 en fonction de N_0, W_p et γ_3.
'rapide' signifie ici $\gamma_3 \gg W_p$. Puisque l'équilibre ets rapide, on peut écrire $\dot{N}_3 = 0$ ce qui permet d'exprimer N_3 en fonction du reste et de le remplacer dans les autres équations. On a alors $N_3 = \dfrac{W_p}{\gamma_3} N_0 \ll 1$. C'est un exemple d'élimination adiabatique (par séparation des échelles de temps), qu'on appelle réduction à la variété centrale en maths, ou AEQS (Approximation des États Quasi-Stationnaire) en chimie.

3- On considère que l'état bas de la transition laser (1) est instable, i.e. la désexcitation $1 \to 0$ est rapide. Ceci peut se traduire par $\dot{N}_1 = 0$. En déduire une expression de N_1 en fonction de N_2, γ_2, $B\,\phi$ et γ_1.
'rapide' signifie ici $\gamma_1 \gg \gamma_2, B\,\phi$. On applique l'AEQS et on a alors $N_3 = \dfrac{\gamma_2 + B\,\phi}{\gamma_1 + B\,\phi} N_2 \ll N_2$

4- Montrer que le système se réduit aux deux équations

$$\begin{aligned}
\dot{N}_2 &= W_p N_0 - \gamma_2 N_2 - B\,\phi N_2 \\
\dot{N}_0 &= \gamma_2 N_2 + B\,\phi N_2 - W_p N_0
\end{aligned}$$

On utilise $\dot{N}_3 = 0$, $\dot{N}_1 = 0$ et $N_2 - N_1 \approx N_2$. Le système équivalent est alors :

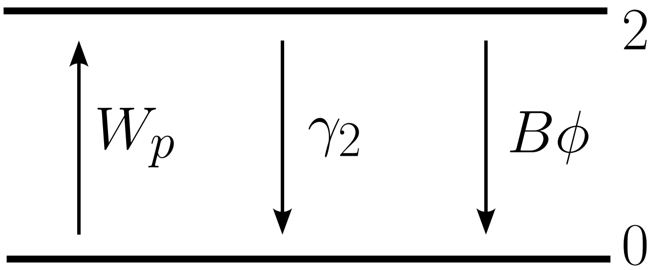

Figure 2: Schéma équivalent au fonctionnement pratique d'un laser 4 niveaux.

Il n'y a plus que 3 processus entre 2 niveaux, et on a réussi à virtuellement enlever l'absorption !

5- Vérifier que la population totale $N \approx N_0 + N_2$ est bien constante.
$\dot{N}_2 = -\dot{N}_0$

6- On introduit l'**inversion de population** $D = N_2 - N_1 \approx N_2$. Montrer que D vérifie l'équation bilan des populations

$$\dot{D} = W_p N - (W_p + \gamma_2 + B\,\phi) D \tag{1}$$

$N_0 = N - D$

Partie B : Évolution du nombre de photons

On s'intéresse maintenant aux photons du mode laser dans la cavité. Comme précedemment, le nombre de photons est notée ϕ et l'inversion de population pour les niveaux laser est $D = N_2 - N_1$. On note V le volume de la cavité, c la vitesse des photons, σ la section efficace d'absorption / d'émission spontanée.

1- Justifier que le volume effectif exploré pendant un temps $\mathrm{d}t$ par un photon est $\sigma c\,\mathrm{d}t$ σ est la section efficace, c'est à dire la section transverse sur laquelle peut se faire l'interaction.

2- Expliquer pourquoi le nombre de photons créés dans la région active pendant un temps $\mathrm{d}t$ est $\phi \cdot D \cdot \sigma c\,\mathrm{d}t = B\,\phi D V_\mathrm{a}\,\mathrm{d}t$ où V_a est le **volume de mode**, c'est-à-dire le volume effectif exploré par les photons.
Le nombre de photons créés est

- **a)** Le nombre de photons présents ϕ fois le nombre d'atomes avec lesquels ils ont interagit $D \cdot \sigma c\,\mathrm{d}t$
- **b)** La diminution d'inversion de population $B\,\phi D\,\mathrm{d}t$ fois le volume sur laquelle elle a lieu V_a

3- En déduire l'expression du coefficient B de la partie précédente.
$B = \sigma c / V_\mathrm{a}$

4- Justifier que l'on peut modéliser les pertes (sortie de cavité, absorption, diffraction...) par un terme $\mathrm{d}\phi^{\text{pertes}} = -\phi/\tau_c\,\mathrm{d}t$, avec τ_c le temps de vie typique des photons en cavités
A chaque passage dans la cavité on perd une proportion P (pertes) de photons, d'où $\Delta\phi = -P\phi$ d'où $\frac{\Delta\phi}{\tau_\mathrm{AR}} = -\frac{P}{\tau_\mathrm{AR}}\phi$ avec τ_AR le temps d'aller retour de la lumière en cavité. D'où $\tau_c = \tau_\mathrm{AR}/P$ le temps caractéristique de décroissance du nombre de photons en cavités.

5- En déduire l'équation bilan de la luminosité

$$\dot{\phi} = BDV_\mathrm{a}\phi - \frac{\phi}{\tau_c} \tag{2}$$

Partie C : Régime continu

On considère maintenant le laser dans le régime continu, c'est à dire que le taux de pompage W_p est constant et que les quantités D et ϕ n'évoluent plus ($\dot{D} = 0$ et $\dot{\phi} = 0$).

1- En l'absence de photons, déterminer l'inversion de population $D_0(W_p)$ atteinte. Justifier qu'il s'agit de l'inversion de population maximale atteignable avec ce taux de pompe.

D vérifie une équadiff du premier ordre, on a donc au final $D = D_0 = \dfrac{W_p}{W_p + \gamma_2} N$, avec un temps caractéristique $\tau_D = 1/(W_p + \gamma_2)$.

TRACER LA COURBE $D_0 = f(W_p)$ POUR MONTRER LA SATURATION. À retenir : $D_0 \propto W_p$ pour le pompage faible, et $D_0 \to N$ pour les grands pompages.

Évidemment D_0 est un max, puisque en général pour $\phi \neq 0$, $D < D_0$.

2- Lorsque de la lumière est émise, on a $\phi \neq 0$. En déduire la valeur que prend alors l'inversion de population, appelée **inversion de population critique** D_c

On a $\dot{\phi} = 0$ et $\phi \neq 0$ d'où

$$D = D_c = \frac{1}{\sigma c \tau_c}$$

3- Donner l'expression du taux de pompe critique $W_{p,c}$ pour lequel l'inversion de population sans lumière vaut D_c.

La condition est $D_0(W_{p,c}) = D_c$ soit

$$W_{p,c} = \gamma_2 \frac{D_c}{N - D_c}$$

4- Montrer que le nombre de photons en cavité croît linéairement en fonction du taux de pompe lorsque celui-ci est au dessus de sa valeur critique.

On utilise $\dot{D} = 0$ avec $D = D_c$ et on exprime ϕ, on trouve

$$\left(\frac{\sigma c}{V_a}\phi + \gamma_2\right) D_c = W_p (N - D_c)$$

$$\frac{1}{V_a \tau_c}\phi = W_p (N - D_c) - \gamma_2 D_c$$

$$\phi = \gamma_2 \tau_c V_a D_c \left(\frac{W_p}{W_{p,c}} - 1\right)$$

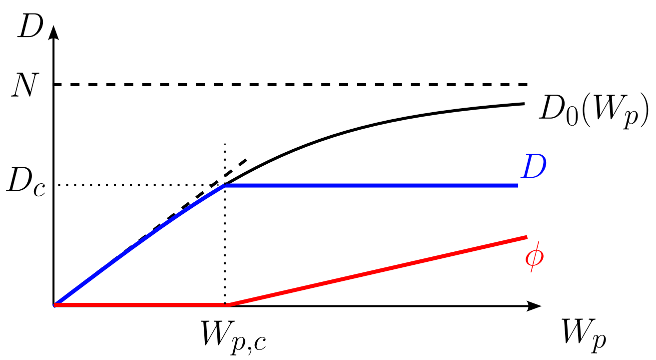

Figure 3: Évolution des trucs pour un laser continu.

Exercice 2 : Équations bilan d'un laser à azote

Le laser à azote est un laser à gaz émettant dans l'ultraviolet à 337.1 nm. Il s'agit d'un système simple à construire et à faire fonctionner soi-même, très prisé des amateurs dans les années 70. Il possède la particularité de ne pas nécessiter de cavité optique, et il émet des impulsions durant quelques nanosecondes.

Le milieu actif (un gaz de diazote N_2) est pompé électriquement avec un taux de pompe W_p du niveau fondamental (0) au niveau haut de la transition (2). Les niveaux 1 et 2 sont instables, et leur temps de vie caractéristiques sont noté τ_1 et τ_2. On donne $\tau_2 \approx 20$ μs et $\tau_1 \approx 40$ μs.

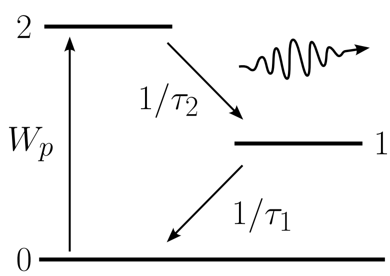

Figure 4: Laser à azote.

Dans cet exercice, pour simplifier, on se place dans le cas peu lumineux où on ne considère pas l'émission stimulée ni l'absorption ; et on considèrera que le niveau fondamental est très peu dépeuplé, c'est à dire $N_0 \approx C^{ste}$.

1- Donner les équation bilan des populations des niveaux 1 et 2.
On a

$$\dot{N}_2 = W_p N_0 - \frac{N_2}{\tau_2}$$
$$\dot{N}_1 = \frac{N_2}{\tau_2} - \frac{N_1}{\tau_1}$$

2- En déduire l'expression des populations $N_2(t)$ puis $N_1(t)$.
Pour N_2 c'est facile, on applique la condition initiale $N_2(t=0) = 0$

$$N_2 = \tau_2 W_p N_0 \left(1 - e^{-t/\tau_2}\right)$$

Pour N_1 on a

$$\dot{N}_1 + \frac{N_1}{\tau_1} = W_p N_0 \left(1 - e^{-t/\tau_2}\right)$$

On cherche une solution particulière, qui va prendre la forme

$$N_1^{(part)} = \tau_1 W_p N_0 + A e^{-t/\tau_2})$$

En appliquant l'équation sur $\dot{N}_1$ on trouve

$$A = \tau_1 W_p N_0 \frac{1}{\tau_1/\tau_2 - 1} \quad \text{i.e.} \quad N_1^{(part)} = \tau_1 W_p N_0 \left(1 + \frac{1}{\tau_1/\tau_2 - 1} e^{-t/\tau_2}\right)$$

D'où

$$N_1 = \tau_1 W_p N_0 \left(1 + \frac{1}{\tau_1/\tau_2 - 1} e^{-t/\tau_2} + B e^{-t/\tau_1}\right)$$

et on applique la condition initiale $N_2(t=0) = 0$ pour trouver B et avoir

$$N_1 = \tau_1 W_p N_0 \left(1 + \frac{1}{\tau_1/\tau_2 - 1} e^{-t/\tau_2} - \frac{\tau_1/\tau_2}{\tau_1/\tau_2 - 1} e^{-t/\tau_1}\right)$$

3- Représenter graphiquement l'évolution des populations. Qu'implique le fait d'avoir $\tau_1 > \tau_2$?
Initialement les deux sont nuls. N_2 est une exponentielle saturante tendant vers $\tau_2 W_p N_0$. N_1 commence avec une dérivée nulle, croît exponentiellement puis sature exponentiellement vers $\tau_1 W_p N_0$.

Le fait d'avoir $\tau_1 > \tau_2$ implique une inversion de population négative à $t = \infty$: ce laser ne peut pas laser à long terme!

4- Pourquoi ce laser est-il dit 'autoterminant' (*self-terminating*) ?
Il s'arrête tout seul au bout d'un temps où l'inversion de population ne peut être maintenue.

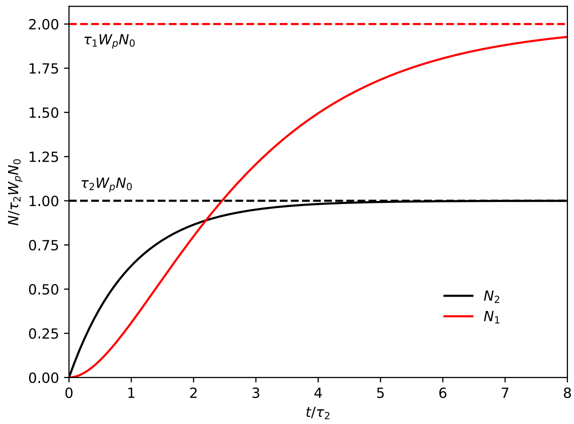

Figure 5: Populations.

Exercice 3 : Laser à 3 niveaux

Lorsque dans un laser à 4 niveaux l'écart d'énergie entre le niveau 1 et le niveau 0 est faible (voir nul, par exemple dans le cas d'un laser à rubis) on peut considérer qu'ils sont confondus, c'est à dire que le niveau bas de la transition laser est le niveau fondamental. On a alors un laser à trois niveaux. On

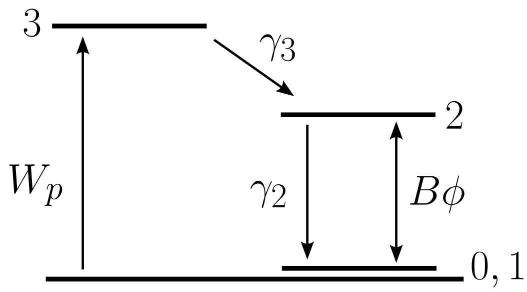

Figure 6: Schéma d'un laser 3 niveaux.

appellera N le nombre total d'atomes présentes dans le milieu.
La question d'un laser 3 niveaux où les niveaux 2 et 3 seraient cette fois ci confondus est plus subtile, elle fait appel à l'émission stimulée sur la fréquence du laser pompe. Ce point a été omis lors du TD 2 pour simplifier la première approche des équations bilan.

1- Donner les trois équations bilan des populations pour un laser à trois niveaux.

$$\dot{N}_3 = W_p N_0 - \gamma_3 N_3$$
$$\dot{N}_2 = \gamma_3 N_3 - \gamma_2 N_2 - B\phi(N_2 - N_0)$$
$$\dot{N}_0 = \gamma_2 N_2 + B\phi(N_2 - N_0) - W_p N_0$$

2- Comme pour le laser à 4 niveaux, on considère que l'état excité (3) est instable et que la désexcitation $3 \to 2$ est rapide.

a) Rappeler le mécanisme par lequel cette désexcitation à lieu.
Rapide, donc **non radiatif** : chocs entre molecules pour un laser a gaz, phonons dans un laser solide.

b) Qu'entend-t-on ici par "rapide" ?
Rapide **devant le temps caractéristique de pompe** $1/W_p$ pour parler du temps de vie de l etat 3.

c) En utilisant cette hypothèse, simplifier les équations bilan pour ne plus avoir que deux équations.
AEQS sur 3, tt se passe comme si on pompait direct de 0 à 2 :

$$\dot{N}_2 = W_p N_0 - \gamma_2 N_2 - B\phi(N_2 - N_0)$$
$$\dot{N}_0 = \gamma_2 N_2 + B\phi(N_2 - N_0) - W_p N_0$$

3- En utilisant la conservation du nombre total d'atomes N, écrire l'équation différentielle qui régit **l'inversion de population** dont on rappellera la définition. Interpréter la différence par rapport au cas du laser à 4 niveaux.
l'équation des populations donne On a $D =$ pop du niveau haut - pop du niveau bas $= N_2 - N_0$ d'où

$$\begin{aligned}\dot{D} &= 2W_p N_0 - 2\gamma_2 N_2 - 2B\phi(N_2 - N_0)\\ &= 2W_p \frac{N-D}{2} - 2\gamma_2 \frac{N+D}{2} - 2B\phi D\\ &= (W_p - \gamma_2)N - (W_p + \gamma_2 + 2B\phi)D\end{aligned}$$

Il y a donc un terme supplémentaire en $-\gamma_2 N$ qui ralentit la croissance de l'inversion de population : maintenant le processus parasite d'émission spontanée, en plus d'appauvrir le niveau hat appauvrit le niveau bas. De même le terme $B\,\phi D$ est doublé : l'inversion de population diminue 2 fois plus vite pour le même nombre de photons créés car à la fois N_2 diminue et N_0 augmente.

4- Dans le cas d'un laser à 4 niveaux, l'inversion de population à l'équilibre en l'absence de photons est

$$\frac{W_p}{W_p + \gamma_2} N$$

Que devient-elle pour un laser à 3 niveaux ? Interpréter.
On a $D_0 = \dfrac{W_p - \gamma_2}{W_p + \gamma_2} N = D_0^{(4)} - \dfrac{\gamma_2}{W_p + \gamma_2} N$ Qui est moins élevée que pour un laser à 4 niveaux.

Plus précisément, pour $W_p < \gamma_2$, l'inversion de population est **négative** : Il existe un seuil pour avoir une inversion de population positive, contrairement au laser à 4 niveaux. C'est normal, car la population du niveau bas de la transition laser n'est pas tout le temps nulle comme dans le cas du laser 4 niveaux.

Pour un pompage nul, on a $D_0 = -N$: tous les atomes sont dans l'état fondamental. Il faut avoir au moins $W_p > \gamma_2$ pour compenser l'émission spontanée et remplir le niveau excité avec plus de la moitié des atomes au total (c'est beaucoup !).

5- Avec le même raisonnement que pour le laser à 4 niveaux, donner l'équation régissant l'évolution du nombre ϕ de photons en cavité.
L'équation lumineuse est inchangée.

$$\dot{\phi} = BD\phi - \frac{\phi}{\tau_c}$$

avec $\tau_c = \tau_{AR}/P$ le temps de vie des photons en cavité. CF TD2 pour les détails.

6- Justifier que l'inversion de population critique soit la même pour un laser à 4 niveaux et un laser à 3 niveaux.
Le raisonnement est le même que pour un laser à quatre niveaux : $\dot{\phi} > 0 \Rightarrow D > 1/B\tau_c = D_c$.

7- En déduire le taux de pompe critique (taux de pompe tel que l'inversion de population sans lumière vaut l'inversion de population critique) pour un laser à trois niveaux. Comparer à la

valeur obtenue pour un laser à 4 niveaux.
On écrit $D_0 = D_c$ d'où

$$W_{p,c}^{(3)} = \gamma_2 \frac{N + D_c}{N - D_C} W_{p,c}^{(4)} = \gamma_2 \frac{D_c}{N - D_c}$$

et donc

$$W_{p,c}^{(3)} = W_{p,c}^{(4)} + \gamma_2 \frac{N}{N - D_c}$$

On trouve bien que le taux de pompe critique est plus élevé. On a intérêt à pomper comme des bourrins pour que ça marche.

Exercice 4 : Transmittance optimale de la cavité

Le but de cet exercice est de déterminer la transmittance idéale du miroir de couplage d'une cavité. En effet, si ce miroir est peu réfléchissant une grande proportion de la lumière passe mais le laser est peu puissant, et si la cavité est trop réfléchissante le laser est puissant mais seule une petite partie de la lumière est transmise. Il existe donc un optimum pour lequel le maximum de puissance optique est transmis hors de la cavité.

On considère une cavité laser formée d'un miroir partiellement réfléchissant de transmittance T par lequel le faisceau est envoyé vers l'extérieur. On considère en outre que dans la cavité et le milieu, il existe des pertes lumineuses autres que celles dues au miroir de couplage. Ces pertes peuvent être dues à la diffusion sur des miroirs de rugosité non nulle, des réflexions parasites sur des interfaces... Elles sont supposées être de L en intensité.

Partie A : Pertes dans la cavité

Dans cette partie, on cherche à modéliser les pertes dans la cavité.

On considère une cavité laser en l'absence d'amplification. On rappelle l'équation d'évolution du nombre de photons est alors :

$$\dot{\phi} = -\frac{\phi}{\tau_c}$$

où τ_c est le temps de vie d'un photon dans la cavité.

1- Quel est le lien entre le nombre de photons ϕ et l'intensité I (puissance par unité de surface) dans la cavité ? En déduire l'équation d'évolution de I.

Puissance traversant une surface S pendant un temps $\mathrm{d}t$: $\mathrm{d}\mathcal{P} = IS\,\mathrm{d}t = h\nu\frac{\phi}{V}Sc\,\mathrm{d}t$ d'où $I = h\nu c\phi/V$. On a donc

$$\dot{I} = -\frac{I}{\tau_c}$$

2- Justifier qu'au bout d'un temps $\Delta t = \ell/c$, où ℓ est le chemin optique d'un trajet entier dans la cavité, l'intensité lumineuse est multipliée par un facteur $S = (1-L)(1-T)$.

Pour une intensité I, une proportion T est perdue par transmittance dans les miroirs et une proportion L par les autres pertes, les deux effets se cumulent et la quantité restante est donc $I(1-L)(1-T)$.

3- En déduire, en supposant que les pertes L et T sont faibles, l'expression de τ_c en fonction de c, ℓ, L et T.

On a d'une part

$$\begin{aligned} I(t+\Delta t) &= (1-L)(1-T)I \\ &\approx I - (L+T)I \end{aligned}$$

et d'autre part

$$I(t+\Delta t) = I + \Delta t\dot{I}$$

en supposant que Δt est faible devant le temps caractéristique de décroissance de l'intensité τ_c ($\Delta t \ll \tau_c$), c'est à dire que la cavité est de bonne qualité, c'est à dire i.e. (à vérifier après le calcul) $L+T \ll 1$.

On peut alors identifier $\Delta t\dot{I}$ et $(L+T)I$, il vient donc $\tau_c = \Delta t/(L+T) = \ell/c(L+T)$.

Partie B : Puissance transmise

Dans cette partie, on se place dans le cas d'un laser 4 niveaux en fonctionnement continu. On pourra utiliser les résultats de l'exercice correspondant.

1- Montrer que la puissance lumineuse transmise à l'extérieur peut s'écrire $\mathcal{P} = \frac{c}{L} h\nu\phi T$
L'énergie contenue à tout instant dans la cavité est $h\nu\phi$, une proportion T est communiquée à l'extérieur pendant un temps $\Delta t = L/c$.

2- En utilisant les expressions obtenues dans l'étude d'un laser à quatre niveaux, montrer que cette puissance peut s'écrire

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 T \left(\frac{\alpha}{T+L} - 1 \right)$$

où $\mathcal{P}_0$ et α sont des constantes que l'on exprimera. On considérera, pour simplifier, que le laser fonctionne à faible puissance et donc que l'inversion de population critique D_c est faible devant la population totale N.
On a $\mathcal{P} = \frac{c}{L} h\nu\phi T$ or $\phi = \frac{V}{\sigma c}\gamma_2 \left(\frac{W_p}{W_{p,c}} - 1 \right)$ avec $W_{p,c} = \gamma_2 \frac{D_c}{N - D_c} \approx \gamma_2 D_C/N$ or $D_c = V/\sigma c \tau_c = V(T+L)/\sigma L$. D'où $\mathcal{P}_0 = h\nu\gamma_2 \frac{V}{\sigma L})$ et $\alpha = N \frac{W_p}{\gamma_2} \frac{L\sigma}{V}$

3- En déduire la valeur de T pour laquelle la puissance transmise est maximale.
Il faut dériver $\mathcal{P}$ par rapport à T. On trouve

$$\mathcal{P}' = \mathcal{P}_0 \left(\frac{\alpha L}{(T+L)^2} - 1 \right)$$

d'où $T = \sqrt{\alpha L} - L$.

On peut aller plus loin en calculant la dérivée seconde :

$$\mathcal{P}'' = -2 \frac{\mathcal{P}_0 \alpha L}{(T+L)^3}$$

qui est toujours négative : On a bien un (unique) maximum. et on peut même avoir

$$\mathcal{P}''' = 6 \frac{\mathcal{P}_0 \alpha L}{(T+L)^4}$$

qui nous indique que la courbe est asymétrique vers la droite : Il est plus intéressant d'avoir une transmittance un peu supérieure qu'un peu inférieure à l'optimum.

Faire un mot sur le cavity dumping : on met un très haut facteur de qualité pour avoir une impulsion hyper puissante en cavité, puis d'un coup on l'ouvre pour faire sortir toute la lumière d'un coup. On a le meilleur des deux : grand et petite transmission du miroir de sortie.