LASER

EIDD 2A GP
2024-2025

TD 2
Équations bilan et régime continu

Exercice 1 : Laser à 4 niveaux

On considère un laser à quatre niveaux, comme schématisé en fig. 1. Il est composé d'un niveau fondamental (0), depuis lequel les atomes sont envoyés à un état excité (3) instable. La transition laser se fait entre les niveaux 2 et 1, le niveau 2 étant métastable et le niveau 1 instable. On appelle N_i la **population** du niveau i, c'est-à-dire la densité d'atomes qui sont dans l'état i. Les phénomènes pris en compte dans la modélisation sont :

- Le pompage des atomes depuis le niveau fondamental (0) vers le niveau excité (3), avec un taux de pompage W_p
- La désexcitation non radiative du niveau excité (3) au niveau haut de la transition laser (2) qui se fait avec un taux γ_3
- La désexcitation par fluorescence (émission spontanée) du niveau haut (2) au niveau bas (1) de la transition laser qui se fait avec un taux γ_2
- La transition laser (absorption ou émission stimulée) entre les niveaux 2 et 1, avec un taux $B \cdot \phi$, ϕ étant le nombre de photons dans la cavité.
- La désexcitation non radiative du niveau bas de la transition laser (1) au niveau fondamental (0) qui se fait avec un taux γ_1

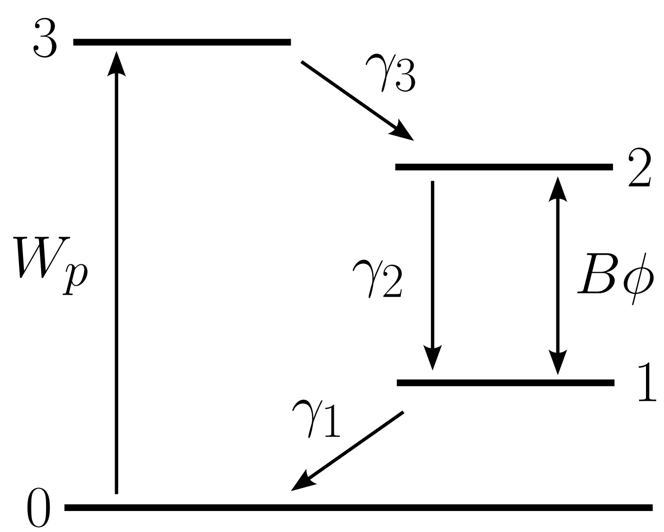

Figure 1: Schéma d'un laser basé sur un système à quatre niveaux.

Partie A : Évolution des populations

1- Écrire les quatre équations qui décrivent l'évolution des populations, $\dot{N}_i = \mathrm{d}N_i \,/\, \mathrm{d}t$, en fonction des données du problème.

2- On considère que l'état excité (3) est instable, i.e. la désexcitation $3 \to 2$ est rapide. Ceci peut se traduire par $\dot{N}_3 = 0$. En déduire une expression de N_3 en fonction de N_0, W_p et γ_3.

3- On considère que l'état bas de la transition laser (1) est instable, i.e. la désexcitation $1 \to 0$ est rapide. Ceci peut se traduire par $\dot{N}_1 = 0$. En déduire une expression de N_1 en fonction de N_2, γ_2, $B\,\phi$ et γ_1.

4- Montrer que le système se réduit aux deux équations

$$\dot{N}_2 = W_p N_0 - \gamma_2 N_2 - B\,\phi N_2$$
$$\dot{N}_0 = \gamma_2 N_2 + B\,\phi N_2 - W_p N_0$$

5- Vérifier que la population totale $N \approx N_0 + N_2$ est bien constante.

6- On introduit l'**inversion de population** $D = N_2 - N_1 \approx N_2$. Montrer que D vérifie l'équation bilan des populations

$$\dot{D} = W_p N - (W_p + \gamma_2 + B\,\phi) D \tag{1}$$

Partie B : Évolution du nombre de photons

On s'intéresse maintenant aux photons du mode laser dans la cavité. Comme précedemment, le nombre de photons est notée ϕ et l'inversion de population pour les niveaux laser est $D = N_2 - N_1$. On note V le volume de la cavité, c la vitesse des photons, σ la section efficace d'absorption / d'émission spontanée.

1- Justifier que le volume effectif exploré pendant un temps $\mathrm{d}t$ par un photon est $\sigma c \,\mathrm{d}t$

2- Expliquer pourquoi le nombre de photons créés dans la région active pendant un temps $\mathrm{d}t$ est $\phi \cdot D \cdot \sigma c \,\mathrm{d}t = B\,\phi D V_\mathrm{a} \,\mathrm{d}t$ où V_a est le **volume de mode**, c'est-à-dire le volume effectif exploré par les photons.

3- En déduire l'expression du coefficient B de la partie précédente.

4- Justifier que l'on peut modéliser les pertes (sortie de cavité, absorption, diffraction...) par un terme $\mathrm{d}\phi^{\text{pertes}} = -\phi/\tau_c \,\mathrm{d}t$, avec τ_c le temps de vie typique des photons en cavités

5- En déduire l'équation bilan de la luminosité

$$\dot{\phi} = B D V_\mathrm{a} \phi - \frac{\phi}{\tau_c} \tag{2}$$

Partie C : Régime continu

On considère maintenant le laser dans le régime continu, c'est à dire que le taux de pompage W_p est constant et que les quantités D et ϕ n'évoluent plus ($\dot{D} = 0$ et $\dot{\phi} = 0$).

1- En l'absence de photons, déterminer l'inversion de population $D_0(W_p)$ atteinte. Justifier qu'il s'agit de l'inversion de population maximale atteignable avec ce taux de pompe.

2- Lorsque de la lumière est émise, on a $\phi \neq 0$. En déduire la valeur que prend alors l'inversion de population, appelée **inversion de population critique** D_c

3- Donner l'expression du taux de pompe critique $W_{p,c}$ pour lequel l'inversion de population sans lumière vaut D_c.

4- Montrer que le nombre de photons en cavité croît linéairement en fonction du taux de pompe lorsque celui-ci est au dessus de sa valeur critique.

Exercice 2 : Équations bilan d'un laser à azote

Le laser à azote est un laser à gaz émettant dans l'ultraviolet à 337.1 nm. Il s'agit d'un système simple à construire et à faire fonctionner soi-même, très prisé des amateurs dans les années 70. Il possède la particularité de ne pas nécessiter de cavité optique, et il émet des impulsions durant quelques nanosecondes.

Le milieu actif (un gaz de diazote N_2) est pompé électriquement avec un taux de pompe W_p du niveau fondamental (0) au niveau haut de la transition (2). Les niveaux 1 et 2 sont instables, et leur temps de vie caractéristiques sont noté τ_1 et τ_2. On donne $\tau_2 \approx 20$ μs et $\tau_1 \approx 40$ μs.

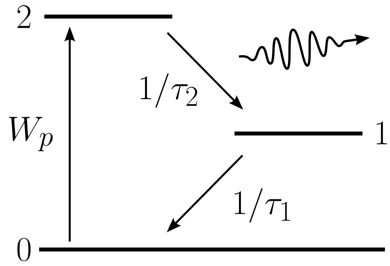

Figure 2: Laser à azote.

Dans cet exercice, pour simplifier, on se place dans le cas peu lumineux où on ne considère pas l'émission stimulée ni l'absorption ; et on considèrera que le niveau fondamental est très peu dépeuplé, c'est à dire $N_0 \approx C^{ste}$.

1- Donner les équation bilan des populations des niveaux 1 et 2.

2- En déduire l'expression des populations $N_2(t)$ puis $N_1(t)$.

3- Représenter graphiquement l'évolution des populations. Qu'implique le fait d'avoir $\tau_1 > \tau_2$?

4- Pourquoi ce laser est-il dit 'autoterminant' (*self-terminating*) ?

Exercice 3 : Laser à 3 niveaux

Lorsque dans un laser à 4 niveaux l'écart d'énergie entre le niveau 1 et le niveau 0 est faible (voir nul, par exemple dans le cas d'un laser à rubis) on peut considérer qu'ils sont confondus, c'est à dire que le niveau bas de la transition laser est le niveau fondamental. On a alors un laser à trois niveaux. On

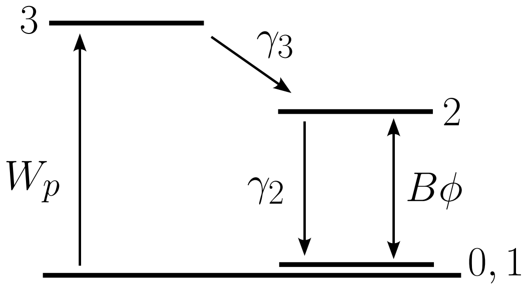

Figure 3: Schéma d'un laser 3 niveaux.

appellera N le nombre total d'atomes présentes dans le milieu.

1- Donner les trois équations bilan des populations pour un laser à trois niveaux.

2- Comme pour le laser à 4 niveaux, on considère que l'état excité (3) est instable et que la désexcitation $3 \to 2$ est rapide.

- **a)** Rappeler le mécanisme par lequel cette désexcitation à lieu.
- **b)** Qu'entend-t-on ici par "rapide" ?
- **c)** En utilisant cette hypothèse, simplifier les équations bilan pour ne plus avoir que deux équations.

3- En utilisant la conservation du nombre total d'atomes N, écrire l'équation différentielle qui régit **l'inversion de population** dont on rappellera la définition. Interpréter la différence par rapport au cas du laser à 4 niveaux.

4- Dans le cas d'un laser à 4 niveaux, l'inversion de population à l'équilibre en l'absence de photons est

$$\frac{W_p}{W_p + \gamma_2} N$$

Que devient-elle pour un laser à 3 niveaux ? Interpréter.

5- Avec le même raisonnement que pour le laser à 4 niveaux, donner l'équation régissant l'évolution du nombre ϕ de photons en cavité.

6- Justifier que l'inversion de population critique soit la même pour un laser à 4 niveaux et un laser à 3 niveaux.

7- En déduire le taux de pompe critique (taux de pompe tel que l'inversion de population sans lumière vaut l'inversion de population critique) pour un laser à trois niveaux. Comparer à la valeur obtenue pour un laser à 4 niveaux.

Exercice 4 : Transmittance optimale de la cavité

Le but de cet exercice est de déterminer la transmittance idéale du miroir de couplage d'une cavité. En effet, si ce miroir est peu réfléchissant une grande proportion de la lumière passe mais le laser est peu puissant, et si la cavité est trop réfléchissante le laser est puissant mais seule une petite partie de la lumière est transmise. Il existe donc un optimum pour lequel le maximum de puissance optique est transmis hors de la cavité.

On considère une cavité laser formée d'un miroir partiellement réfléchissant de transmittance T par lequel le faisceau est envoyé vers l'extérieur. On considère en outre que dans la cavité et le milieu, il existe des pertes lumineuses autres que celles dues au miroir de couplage. Ces pertes peuvent être dues à la diffusion sur des miroirs de rugosité non nulle, des réflexions parasites sur des interfaces... Elles sont supposées être de L en intensité.

Partie A : Pertes dans la cavité

Dans cette partie, on cherche à modéliser les pertes dans la cavité.

On considère une cavité laser en l'absence d'amplification. On rappelle l'équation d'évolution du nombre de photons est alors :

$$\dot{\phi} = -\frac{\phi}{\tau_c}$$

où τ_c est le temps de vie d'un photon dans la cavité.

1- Quel est le lien entre le nombre de photons ϕ et l'intensité I (puissance par unité de surface) dans la cavité ? En déduire l'équation d'évolution de I.

2- Justifier qu'au bout d'un temps $\Delta t = \ell/c$, où ℓ est le chemin optique d'un trajet entier dans la cavité, l'intensité lumineuse est multipliée par un facteur $S = (1-L)(1-T)$.

3- En déduire, en supposant que les pertes L et T sont faibles, l'expression de τ_c en fonction de c, ℓ, L et T.

Partie B : Puissance transmise

Dans cette partie, on se place dans le cas d'un laser 4 niveaux en fonctionnement continu. On pourra utiliser les résultats de l'exercice correspondant.

1- Montrer que la puissance lumineuse transmise à l'extérieur peut s'écrire $\mathcal{P} = \frac{c}{L} h\nu\phi T$

2- En utilisant les expressions obtenues dans l'étude d'un laser à quatre niveaux, montrer que cette puissance peut s'écrire

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 T \left(\frac{\alpha}{T+L} - 1 \right)$$

où $\mathcal{P}_0$ et α sont des constantes que l'on exprimera. On considérera, pour simplifier, que le laser fonctionne à faible puissance et donc que l'inversion de population critique D_c est faible devant la population totale N.

3- En déduire la valeur de T pour laquelle la puissance transmise est maximale.