

Exercices d'électromagnétisme (1)

Grégoire Le Lay

AIPC 2024-2025

Comment utiliser ce document

Dans ce document, pour chaque partie les exercices ont été divisés en trois catégories :

- les *exercices de cours* sont des exercices simples qu'il faut savoir faire "sans réfléchir". Ils tournent autour de notions incontournables, il est très important de savoir les faire le jour des écrits (et des oraux !) ;
- les *exercices classiques* sont des exercices standards qui permettent de développer des notions classiques et présenter des techniques utiles (en italique) ;
- enfin les *exercices d'approfondissement*, plus difficiles, permettent de mettre en application les notions d'électromagnétisme dans des exercices plus complexes ou plus calculatoires.

Point méthode en électromagnétisme : Théorèmes intégraux

- À partir de la géométrie de problème, choisir le bon système de coordonnées ;
- utiliser les invariances du problème pour réduire le nombre de variables ;
- utiliser les symétries pour réduire le nombre de composantes vectorielles ;
- identifier une surface fermée, un contour etc. et appliquer le théorème intégral pertinent.

Point méthode en électromagnétisme : Induction

- Analyser qualitativement la situation (loi de Lenz) ;
- mettre en cohérence l'orientation des surfaces et le signe des intensités;
- dessiner le schéma électrique équivalent avec la force électromotrice ;
- écrire l'équation mécanique et l'équation électrique;
- calculer la tension de Faraday et la force de Lorenz.

ÉLECTROSTATIQUE

Exercices de cours

Exercice 1 : Sphère uniformément chargée

On considère une sphère de centre O et de rayon R uniformément chargée avec une densité de charge ρ .

- 1- Établir l'expression de champ électrique \mathbf{E} pour tout point à une distance $r < R$ et $r > R$ de O
- 2- De même, établir l'expression du potentiel V pour un point quelconque, en fonction de la charge totale de la sphère Q .
- 3- Lorsque $r > R$, quelle est la dépendance de V avec R ?

Exercice 2 : Cylindre uniformément chargé

On considère un cylindre infini d'axe z et de rayon R uniformément chargée avec une densité de charge ρ .

- 1- Établir l'expression de champ électrique \mathbf{E} pour tout point à une distance $r < R$ et $r > R$ de l'axe z
- 2- De même, établir l'expression du potentiel V pour un point quelconque en fonction de la densité linéique de charge λ .

Exercice 3 : Plan uniformément chargé

On considère un plan infini situé en $z = 0$ uniformément chargé avec une densité surfacique de charge σ .

- 1- Établir l'expression de champ électrique \mathbf{E} pour tout point à une distance de cote $z > 0$ et $z < 0$

On considère maintenant que la plaque n'est plus infinie mais de surface finie S , mais on suppose que l'expression du champ électrique établi à la question précédente reste valable.

- 2- Établir l'expression du potentiel V pour un point quelconque en fonction de la charge Q de la plaque.

On place maintenant une seconde plaque identique à la première mais chargée négativement à la cote $z = d$. On considère en outre que le milieu entre les deux plaques a une permittivité électrique relative ϵ_r

- 3- Représenter graphiquement $V(z)$ et $E_z(z)$
- 4- On appelle U la différence de potentiel entre les deux plans. Exprimer U , la différence de potentiel entre les deux plans, en fonction de Q , S , ϵ , d et ϵ_r .
- 5- Quelle est la capacité du condensateur ainsi formé ?

Exercice 4 : Dipôle électrostatique

On considère deux charges, $+q$ et $-q$ dans le plan xy , séparées d'une distance a dans la direction x . On appelle O le point au milieu géométrique entre les deux charges.

- 1- Calculer le potentiel V en tout point M du plan tel que $OM \gg a$
- 2- En déduire le champ E dans cette même zone.

Exercices classiques

Exercice 5 : Terre creuse

Analogie gravito-électrostatique — Théorème de superposition

- 1- Énoncer l'analogie entre électrostatique et gravitation, en précisant quelles sont les grandeurs concernées.
- 2- En déduire le champ gravitationnel dû à la Terre, de rayon R_T et de masse volumique moyenne (supposée homogène) ρ

Certaines "théories" supposent que la Terre est en fait creuse, c'est-à-dire que nous vivons sur une coquille d'épaisseur e et qu'entre le centre et une distance $R_T - e$ du centre il n'y a rien. Une hypothétique civilisation habiterait de l'autre côté de la coquille, sur la face intérieure.

- 3- Quel serait le champ gravitationnel au sein (et en dehors) d'une telle Terre creuse ?

Exercice 6 : Énergies de constitution d'une sphère

Énergie électrostatique — Énergies de constitution — Analogie gravito-électrostatique

Le but de cet exercice est de calculer l'énergie de constitution (=énergie minimale requise pour former) d'une sphère de rayon R et de charge totale Q

- 1- Méthode 1: Densité d'énergie électrostatique
 - a) Considérant la sphère formée, donner l'expression du champ électrique \mathbf{E} en tout point de l'espace
 - b) En déduire l'expression de la densité volumique d'énergie électrostatique $e_{\text{stat}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \mathbf{E}^2$
 - c) En intégrant cette énergie volumique, trouver l'énergie totale présente dans tout l'espace
- 2- Méthode 2: Construction de la sphère
 - Donner l'expression du potentiel électrostatique à la bordure d'une sphère de densité de charge ρ et de rayon r
 - On souhaite ajouter à cette sphère une calotte d'épaisseur dr , de charge volumique ρ . Quelle énergie faut-il fournir pour transporter cette calotte de $+\infty$ à la distance r du centre de la sphère ?
 - En intégrant cette quantité, donner l'énergie totale de constitution de la sphère
- 3- En utilisant l'analogie électrostatique – gravitation, donner l'expression de la densité volumique d'énergie gravitationnelle en fonction de la constante G et du champ de pesanteur g
- 4- En déduire l'énergie de constitution d'un astre sphérique de rayon R et de masse M . Quel est son signe ?

Exercice 7 : Charge et conducteur

Méthode des images — Champ dipolaire — Interaction totale

On considère un corps de charge q situé à une distance z d'un plan infini délimitant un conducteur parfait maintenu au potentiel nul.

- 1- Justifier que le potentiel et le champ dans le demi-espace où se trouve la charge peuvent être calculés comme ceux créés dans le vide par deux charges : q en A et $-q$ en A' , symétrique de A par rapport au plan. (Méthode des images).
- 2- Montrer que le système {particule + paroi} est équivalent à un dipôle électrostatique dont on précisera l'emplacement et le moment dipolaire.
- 3- Rappeler la relation de passage pour le champ électrique discontinu et en déduire la densité de charge $\sigma(P)$ pour tout point P du plan médian.
- 4- Calculer la charge totale portée en surface par le conducteur. Est-ce surprenant ?

Exercices d'approfondissement

Exercice 8 : Le cerceau

On considère une distribution continue de charges, formant un cercle de rayon R et de charge totale q dans le plan Oxy , où O est le centre géométrique du cercle. On étudiera uniquement les effets de la distribution pour une charge test située sur l'axe Oz , perpendiculaire au plan du cercle.

- 1- Discuter les éléments de symétrie de la distribution et en déduire la forme attendue du champ $\mathbf{E}(z)$ pour un observateur situé sur Oz .
- 2- Calculer la contribution au potentiel électrique $dV(z)$ d'un élément dq de la distribution — qu'on exprimera dans un système de coordonnées bien choisi — pour un observateur situé en z sur Oz .
- 3- En déduire le potentiel total $V(z)$ généré par le cercle en z , puis le champ électrique $\mathbf{E}(z)$.
- 4- Soit une charge test q' contrainte sur l'axe Oz . Établir la dynamique de q' proche de $z = 0$.
On considère que cette charge $q' = -q$ est désormais fixée en $z = d$.
- 5- Quel est le potentiel total V' ressenti pour un observateur en z ?
- 6- Pour d non nul, montrez que loin de l'origine la distribution totale se comporte comme un dipôle, dont on calculera le moment dipolaire \vec{p} .
- 7- Quid du cas $d = 0$?

MAGNÉTOSTATIQUE

Exercices de cours

Exercice 9 : Fil droit

On considère un fil cylindrique droit, s'étendant à l'infini dans la direction z , de section circulaire de rayon R , parcouru par une densité de courant j

- 1- Établir l'expression de champ magnétique \mathbf{B} pour tout point à une distance $r < R$ et $r > R$ de l'axe central du fil.
- 2- Exprimer ce champ en fonction du courant I parcourant le fil.
- 3- De 1948 à 2029, la définition de l'ampère était "Un ampère est l'intensité d'un courant constant qui, s'il est maintenu dans deux conducteurs linéaires et parallèles, de longueurs infinies, de sections négligeables et distants d'un mètre dans le vide, produit entre ces deux conducteurs une force linéaire égale à 2×10^{-7} newton par mètre". Montrer que cette définition impose la valeur de la perméabilité magnétique du vide μ_0 .

Exercice 10 : Solénoïde

On considère un solénoïde modélisé comme un ensemble de boucles de courant de rayon R toutes parcourues d'un courant I disposées autour d'un même axe de révolution avec une densité linéique n . On considère un solénoïde de longueur L mais on néglige les effets de bord dans les calculs, pour lesquels on peut considérer le solénoïde comme infini.

- 1- Déterminer l'expression du champ magnétique \mathbf{B} engendré par le solénoïde, à l'intérieur et en dehors du solénoïde.
- 2- Rappeler la définition de l'inductance L en électronique en termes du champ magnétique B et du courant I et déduire de la question précédente l'inductance L du solénoïde.

Exercices classiques

Exercice 11 : Le câble coaxial

Énergie magnétostatique

On considère un câble coaxial constitué de deux cylindres concentriques de longueur infinie et de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. La région intérieure $r < R_1$, l'âme, est conductrice et est parcourue par un courant I réparti uniformément sur sa section. La région $R_1 < r < R_2$, la gaine, est isolante et un courant $-I$ est réparti à sa surface en $r = R_2$.

- 1- Trouver l'expression du champ magnétique \vec{B} engendré par le courant I dans la gaine, l'âme et à l'extérieur du câble coaxial.
- 2- On considère maintenant la quantité $u = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}$, qui a la dimension d'une énergie par unité de volume. Quelle est l'énergie contenue dans une longueur ℓ de câble coaxial ?
- 3- À l'aide de l'expression usuelle de l'énergie emmagasinée par une inductance, déduire de la question précédente l'inductance correspondant à une longueur ℓ de câble coaxial.
- 4- Calculer l'inductance par unité de longueur correspondant à un câble BNC usuel.

Exercices d'approfondissement

Exercice 12 : Piège de Ioffe-Prichard

- 1- Exprimer le champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ créé par un fil vertical infini de rayon négligeable et parcouru par un courant I .
- 2- Justifier rapidement que l'on puisse écrire le champ magnétique sous la forme $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times (A(r)\mathbf{e}_z)$, et trouver l'expression de $A(r)$ pour le champ précédent.

On considère désormais le dispositif suivant : quatre fils conducteurs sont disposés aux sommets d'un carré de côté $2a$ et sont parcourus par des courants $+I$ et $-I$, alternativement.

- 3- Quelle est l'expression du potentiel vecteur $A(x, y)$ en un point M d'un plan (O, x, y) dont l'origine et les axes auront été judicieusement choisis ?
- 4- Exprimer A à l'ordre le plus bas utile pour x et y proches de l'origine.
- 5- En déduire le champ magnétique \vec{B} pour un point proche de l'origine. Son expression est-elle cohérente avec les invariances et les symétries de cette nouvelle configuration ?

On place dans ce champ un neutron de moment magnétique \vec{m} . À l'aide de techniques de pompage optique, il est possible de maintenir le moment magnétique du neutron dans la direction opposée de celle du champ.

- 6- Par analogie avec un dipôle électrique, donner l'énergie magnétique \mathcal{E}_{mag} d'un tel neutron placé dans un champ \mathbf{B} .
- 7- Tracer la courbe $E_m(\rho)$ avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ pour le système étudié et commenter l'appellation "piège" de Ioffe pour ce dispositif.

Données : Rotationnel en coordonnées cylindrique

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z$$

INDUCTION

Exercices de cours

Exercice 13 : Rail de Laplace

Dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \mathbf{e}_z$, une barre conductrice est placée en $x_0 > 0$ dans la direction y perpendiculairement à une paire de rails dirigés selon Ox , écartés d'une distance a et reliés en $x = 0$ par une résistance R . À $t = 0$, on donne à la tige une vitesse initiale v_0 .

- 1- Sans calculs, quelle sera la vitesse de la barre lorsque $t \rightarrow \infty$? En vertu de quel principe ?
- 2- Écrire les équations mécaniques et électriques pertinentes pour ce système.
- 3- En déduire le comportement dynamique de la barre et le temps caractéristique d'évolution de sa vitesse
- 4- En utilisant des bilans de puissance, expliciter les transferts d'énergie ayant cours dans ce système.

Exercices classiques

Exercice 14 : Rail de Laplace 2: Le retour

Induction de Lorentz — Bilans énergétiques

Reprendre l'exercice du rail de Laplace et faire la même étude, en rajoutant au fur et à mesure les éléments ci-dessous. Essayer à chaque fois de faire une estimation en ordre de grandeur de la vitesse finale

- Incliner les rails d'un angle α vers le bas
- Ajouter un condensateur en série avec la résistance
- Ajouter une résistance linéique aux rails ρ
- Faire en sorte que les rails ne soient plus parallèles mais divergent d'un angle β

Exercice 15 : Cadre tombant

Freinage inductif — Loi de Lenz

On considère un cadre rectangulaire de longueur a et de hauteur h dans le plan Oxy dont le point le plus bas est en $y = y_0 > 0$. Dans l'espace $0 \leq y \leq H$ règne un champ magnétique uniforme $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$. L'accélération de la pesanteur est $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_y$. On lâche le cadre à $t = 0$.

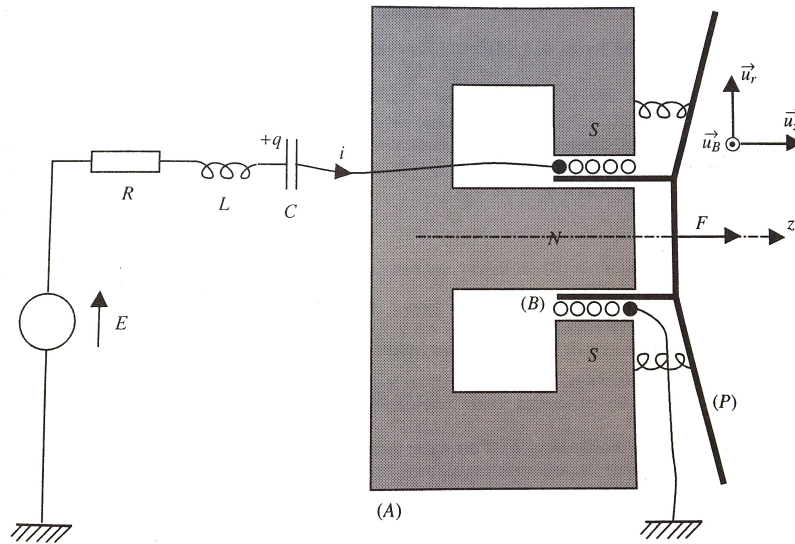
- 1- Décrire qualitativement le comportement du système
- 2- Que se passerait-il si on change la direction du champ magnétique ($B_0 \rightarrow -B_0$) ?
- 3- Écrire les équations régissant le système
- 4- Donner le temps t_s de sortie du haut du cadre du champ magnétique dans le cas $H = h$

Exercice 16 : Haut-parleur

(Exercice de J. Neveu)

Échanges énergétiques

La figure représente un dispositif pouvant servir aussi bien de haut-parleur que de microphone. (A) est un aimant permanent possédant une symétrie de révolution d'axe Oz . Dans son entrefer règne un champ magnétique radial, dans la région où se déplace le bobinage (B) solidaire du pavillon (P). Ce champ s'écrit en coordonnées cylindriques $\mathbf{B} = B \mathbf{u}_r$. (P) est un système de masse totale m , susceptible de se déplacer le long de Oz , il peut être mis en mouvement de translation par l'action d'une force extérieure $F \mathbf{u}_z$. Il subit en outre des forces dissipatives de somme $-h \dot{z} \mathbf{u}_z$, des forces de rappel de somme $-kz \mathbf{u}_z$ exercées par un système de ressorts ainsi que des forces de Laplace de somme \mathbf{f} exercées sur (B). Ce dernier est constitué d'une longueur totale de fil l , transporte un courant d'intensité i . Négligeant l'hélicité de (B), on admet que chaque élément de fil est représentable en coordonnées cylindriques par $d\mathbf{l} = dl \mathbf{u}_\theta$. (B) est alimenté par une source de tension E à travers un circuit dont on note R , L et C les résistances, inductance et capacités totales (c'est-à-dire relatives à l'ensemble du circuit, (B) compris).



- 1- Exprimer \mathbf{f} en fonction de $i = \dot{q}$, B et l . En déduire l'équation différentielle (M) vérifiée par $z(t)$ qui traduit le comportement mécanique du système.
- 2- Exprimer en fonction de $v = \dot{z}$, B et l la force électromotrice induite dans (B). En déduire l'équation différentielle (E) vérifiée par la fonction $q(t)$ et traduisant le comportement électrique du système.
- 3- Effectuer la combinaison de (M) et (E) afin d'établir un bilan d'énergie de la forme:

$$\frac{dU}{dt} = Fv + Ei - Ri^2 - hv^2 \quad (1)$$

U étant une fonction que l'on explicitera et dont l'on donnera l'interprétation énergétique ainsi que celle de tous les autres termes.

- 4- On suppose un régime sinusoïdal forcé de pulsation ω de toutes les grandeurs précédentes. En introduisant dans une notation complexe en $e^{j\omega t}$ les grandeurs dont on donnera le signification:

$$\underline{z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right), \quad \underline{\xi} = h + j \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right) \quad (2)$$

écrire les équations (M') et (E') qui relient les représentations complexes de v , i , F et E .

- 5- Dans le fonctionnement en *haut-parleur*, F est nul et l'énergie du système provient de la source de tension E . La réponse du système est alors caractérisée par une relation $\underline{v}(\underline{i})$ que l'on explicitera en notation complexe ainsi que $\underline{i}(\underline{E})$ en introduisant la quantité $\underline{Z} = B^2 l^2 / \underline{\xi}$ dont on commentera la signification. Expliquer pourquoi le système peut, pour des valeurs convenables de ω , être une source sonore.
- 6- Dans le fonctionnement *microphone*, E est nul et l'énergie du système provient de la force sinusoïdale F qui traduit l'action sur (P) des forces de pression de l'onde sonore. La réponse du système est alors caractérisée par la fonction $\underline{i}(\underline{F})$ que l'on explicitera à l'aide des notations précédentes.

Exercices d'approfondissement

Exercice 17 : Freinage

On laisse tomber un petit aimant de moment magnétique m dans un long cylindre creux en cuivre de rayon R , de faible épaisseur e et de conductivité σ placé verticalement.

- 1- La chute de l'aimant sera-t-elle plus rapide, plus lente ou inchangée par rapport à la situation où le cylindre ne serait pas conducteur (en plastique par exemple) ?
- 2- Quelle est la dépendance du phénomène en σ et en m ?
- 3- Le comportement est-il modifié si l'on fend le barreau sur sa longueur ?

Exercice 18 : Couplage dissipatif

On considère deux rails conducteurs parallèles écartés d'une distance a . Perpendiculairement à ces rails on place deux barres, chacune de résistance $R/2$ et de masse m . Les barres sont chacune reliées à un bâti isolant par un ressort de raideur k . On plonge le tout dans un champ constant B_0 orthogonal à la fois aux rails et aux barres.

- 1- Exprimer Φ le flux du champ magnétique entre les deux barres en fonction de B_0 , a et les positions x_1 et x_2 des deux barres.
- 2- En déduire une expression de l'intensité $I(t)$ parcourant le circuit.
- 3- Exprimer les forces de Laplace s'appliquant sur les barres et en déduire l'équation de la dynamique pour chacune des deux barres.
- 4- Initialement chaque barre est fixée à la position de repos du ressort auquel elle est attaché. Une impulsion donne à une des barres la vitesse v_0 . Décrire l'évolution du système au long terme.

Exercice 19 : Chauffage par induction

(Exercice de J. Neveu)

On considère un barreau cylindrique de cuivre (conductivité $\sigma \approx 6 \times 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$), d'axe Oz , de rayon R et de hauteur h . En son coeur, on considère un champ magnétique uniforme, parallèle à Oz , d'amplitude B_0 , et variant dans le temps de manière sinusoïdale à la pulsation ω .

- 1- Il apparaît dans le barreau des courants volumiques dits courants de Foucault. Expliquer le phénomène. Dans quelles situations courantes rencontre-t-on ce phénomène ?
- 2- Calculer le champ électrique \mathbf{E} induit dans le cylindre.
- 3- Calculer la puissance moyenne dissipée dans le barreau par effet Joule.
- 4- Application au cas d'une casserole. Commenter.
- 5- Est-il préférable, dans une machine électrique, d'utiliser des conducteurs de forte section ou un ensemble de petits conducteurs indépendants mis en parallèle (à section totale égale) ?

Exercice 20 : Dynamo

AIPC 2012, partie B.4 (questions 57 à 66)