Fonctions usuelles

PCSI 2 Lycée Pasteur

24 septembre 2007

Ce chapitre est un condensé assez rapide de toutes les bases dont vous aurez besoin tout au long de vos deux années de prépa concernant les fonctions. Certaines choses ont déjà été étudiées au lycée, d'autres non (quelques nouvelles fonctions font leur apparition dans les pages qui suivent) ; en tout cas, tout ceci est à connaitre sur le bout des doigts. Le vocabulaire de base sur les fonctions, ainsi que les propriétés de parité ou de périodicité, ne sont pas rappelés et donc supposés maitrisés. Vous avez par contre droit à une petite partie de rappels sur la dérivation, incomplète faute de support théorique suffisant (définition correcte d'une limite notamment), mais tout cela viendra un peu plus tard dans l'année. On s'intéresse dans ce chapitre, sauf mention contraire, à des fonctions réelles d'une variable réelle.

1 Rappels sur la dérivation

1.1 Un peu de théorie

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$, on dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. On dit aussi que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Remarque 1. Cette définition est affreusement hypocrite puisqu'on ne dispose pas de définition précise de ce qu'est une limite. La définition usuellement donnée au lycée est du type « quand x devient suffisamment proche de a, $f(x)$ peut être rendu aussi proche que voulu de $f(a)$ ». Vous avez maintenant les outils suffisants pour comprendre la définition formelle : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, (|x-a| < \eta) \Rightarrow (|f(x) - f(a)| < \epsilon)$. On n'utilisera toutefois pas cette définition pour l'instant, les démonstrations devenant assez techniques.

Définition 2. Une fonction f définie sur un intervalle I est dérivable en $a \in I$ si le taux d'accroissement de f en a, défini sur $I \backslash \{a\}$ par $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, admet une limite quand x tend vers a. Cette limite est alors notée $f'(a)$ et appelée nombre dérivé de f en a. Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I, et on appelle fonction dérivée de f, notée f', la fonction $x \mapsto f'(x)$.

Remarque 2. Dans les démonstrations, on utilise beaucoup plus fréquemment la forme équivalente $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Proposition 1. Si f est dérivable en un point a, alors elle est continue en a.

Remarque 3. Rappelons au cas où que la réciproque de cette affirmation est fausse en général.

Démonstration. En effet, f étant dérivable en a, $\lim\limits_{x \to a} f'(a)(x-a)$ existe (elle vaut 0 !) et est égale à la limite de $f(x) - f(a)$. On a donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$, ce qui prouve exactement que f est continue en a. □

Remarque 4. On peut exprimer ce résultat de la façon suivante : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)$, où ε est une fonction de limite nulle quand x tend vers a.

Définition 3. La droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ est appelée tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a (c'est la droite qui « colle » le plus à la courbe en ce point). On dit aussi que $f(a) + f'(a)(x - a)$ réalise une approximation affine de f au point d'abscisse a, ou encore un développement limité d'ordre 1 en ce même point (vous comprendrez le sens de ce terme un peu plus tard dans le cours de cette année).

1.2 Règles de dérivation

Proposition 2. Soient f et g deux fonction définies et dérivables sur un intervalle I, alors

- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, $\alpha f + \beta g$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$.
- fg est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- Si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur I et $\forall x \in I$, $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x) = -\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$; $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Démonstration. En effet, si $(a, x) \in I^2$, $(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(a) = \alpha(f(x) - f(a) + \beta(g(x) - g(a))$, et les règles de calcul sur les limites permettent de conclure (règles qu'il faudrait bien évident démontrer rigoureusement pour avoir une construction correcte de notre cours).

Pour le produit, une petit astuce s'impose : $(fg)(x) - (fg)(a) = f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))$, donc $\dfrac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} = f(x)\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} + g(a)\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Les deux fonctions étant supposées dérivables, les quotients ont des limites respectivement égales à $g'(a)$ et $f'(a)$, et g étant continue puisque dérivable, $f(x)$ a pour limite $f(a)$ quand x tend vers a, donc le taux d'accroissement du produit a une limite, qui vaut bien $f(a)g'(a) + g(a)f'(a)$.

Enfin, on a $\dfrac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x - a} = \dfrac{g(a) - g(x)}{g(x)g(a)(x - a)} = -\dfrac{1}{g(x)g(a)} \dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}$. Le premier quotient tend vers $\dfrac{1}{g(a)^2}$ (rappeons que $g(a)$ est non nul), le deuxième vers $g'(a)$, ce qui prouve la formule pour l'inverse. Pour le quotient, pas besoin de se fatiguer, c'est le produit de f par $\dfrac{1}{g}$, donc $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)}{g(x)} - \dfrac{f(x)g'(x)}{g(x)^2} = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$. □

Proposition 3. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et g une fonction définie et dérivable sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $(g \circ f)'(x) = f'(x)g' \circ f(x)$.

Démonstration. Le taux d'accroisement de $g \circ f$ vaut, $\dfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{x - a} = \dfrac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. La limite du premier quotient est $g'(f(a))$, puisque $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a, et la limite du deuxième est $f'(a)$, d'où la formule.

Vous avez vu l'arnaque ? C'est bien. Il y a un gros problème dans cette démonstration, $f(x)$ peut très bien être égal à $f(a)$ (et ce pour des valeurs aussi proches de a que l'on veut). Pour éviter cet écueil, il faut éviter les quotients : $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$, et de même $g(y) = g(b) + g'(b)(y - b) + \eta(y)$. En prenant $b = f(a)$ et $y = f(x)$, on obtient $g \circ f(x) = g \circ f(a) + g' \circ f(a)(f(x) - f(a)) + \eta(f(x))$. Le dernier terme $\eta(f(x))$ tend vers 0 quand x tend vers a, il reste $g \circ f(a) + g' \circ f(a)(f'(a)(x - a) + \varepsilon(x)))$, ce qui donne bien la formule demandée pour $(g \circ f)'(a)$. □

Proposition 4. Soit f une fonction dérivable et bijective d'un intervalle I vers un intervalle J, telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors $f^{-1} : J \to I$ est aussi dérivable, et $\forall y \in J$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Démonstration. On sait que la fonction $f \circ f^{-1}$ est définie et égale à l'identité sur J, donc est de dérivée égale à 1. En utilisant la propriété précédente, on obtient donc $\forall y \in J$, $(f^{-1})'(y) \times f'(f^{-1}(y)) = 1$, ce qui, si f' ne s'annule pas sur I, prouve bien la formule.

Convaincu par celle-ci ? Elle n'est pourtant pas mieux que la précédente, on a tranquillement supposé que f^{-1} étai dérivable pour prouver la formule ! On peut pourtant s'en sortir tout simplement. Soit $b \in J$ et $a = f^{-1}(b)$. Comme f' ne s'annule pas sur I, on a en prenant l'inverse de la définition de la dérivée $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{f(x)-f(a)} = \dfrac{1}{f'(a)}$, donc en posant $y = f(x)$, ce qui équivaut à $x = f^{-1}(y)$, $\lim\limits_{f^{-1}(y)\to f^{-1}(b)} \dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = \dfrac{1}{f'(a)}$. Or, $f^{-1}(y) \to f^{-1}(b) \Leftrightarrow y \to b$, puisque f et f^{-1} sont des bijections réciproques continues. Le taux d'accroissement de f^{-1} a donc une limite en b, et $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$. □

Remarque 5. Rappelons au passage que le graphe de la bijection réciproque de f est le symétrique de celui de f par rapport à la droite d'équation $y = x$. On voit bien visuellement que si $f'(a) = 0$ (c'est-à-dire que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse a), alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$, elle y admet une tangente verticale.

1.3 Dérivée et variations

Proposition 5. Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, alors si f' est positive (respectivement négative) sur I, f est croissante (resp. décroissante) sur I. Si de plus f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I, f y est strictement monotone. Enfin, si f admet un extremum local en un point x de I autre qu'une des extrémités de l'intervalle, on a $f'(x) = 0$.

Remarque 6. Attention, les réciproques des dernières affirmations ne sont pas vraies : f peut être strictement monotone et avoir une dérivée qui s'annule une infinité de fois (la condition exacte est un peu technique) ; f' peut s'annuler sans que la valeur de x correspondante ne soit un extremum local.

Démonstration. Les deux premières propriétés seront démontrées dans un chapitre ultérieur. La dernière est beaucoup plus facile : si a est un extremum local de f, par exemple un minimum, cela signifie qu'il existe un intervalle $]b;c[$ contenant a tel que $\forall x \in]b;c[$, $f(x) \geqslant f(a)$. On a donc, $\forall x \in]b;a]$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$, et $\forall x \in [a;c[$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$. Or, ces deux expressions ont une limite en a qui est la même (puisque f est dérivable), donc ne peut valoir que 0. □

1.4 Asymptotes

Définition 4. Soit f une fonction définie sur un intervalle $]b;c[$ et $a \in]b,c[$, la courbe de f admet une asymptote verticale en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$.

Remarque 7. La fonction f peut très bien être définie en a. On peut même dire qu'il y a asymptote verticale dès que la limite à gauche ou à droite en a est infinie.

Définition 5. Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a;+\infty[$ (ou $]-\infty;b]$, on ne traitera que le premier cas mais le second est très similaire).

Si f admet une limite finie l quand $x \to +\infty$, la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = l$.

Si f admet une limite infinie quand $x \to +\infty$, trois cas peuvent se présenter :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$: on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy) (c'est le cas par exemple de la fonction carré).

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$: $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Ox) (comme la fonction racine carrée).
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l \neq 0$: si de plus $f(x) - lx$ a une limite finie m quand $x \to +\infty$, la courbe admet une asymptote oblique d'équation $y = lx + m$; si la limite de $f(x) - ax$ est infinie, $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique dont la direction est cette même droite.

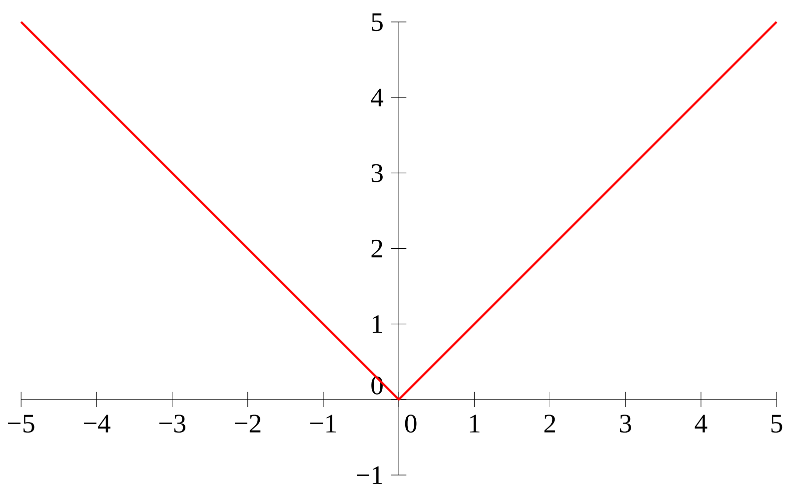
2 Fonctions valeur absolue, polynomiales et racines n-èmes

2.1 Valeur absolue

Définition 6. La fonction valeur absolue est définie sur $\mathbb{R}$ comme associant à x la distance entre x et 0, notée $|x|$.

Proposition 6. On a $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|x| = x$, et $\forall x \in \mathbb{R}_-$, $|x| = -x$.

La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée égale à 1 sur $\mathbb{R}_+$ et à -1 sur $\mathbb{R}_-$. Sa représentation graphique est la suivante :

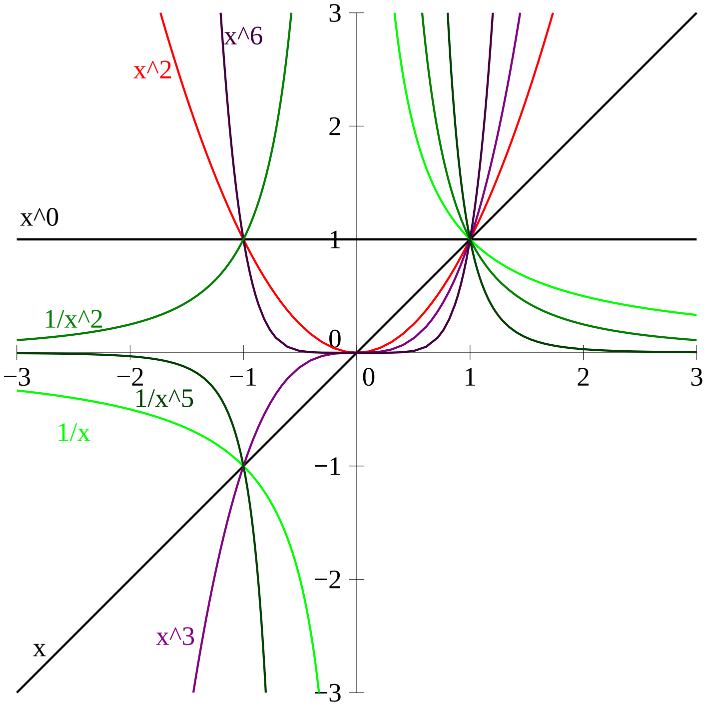


Démonstration. La première propriété découle aisément de la définition : si $x \geqslant 0$, $d(x, 0) = x - 0 = x$, et sinon $d(x, 0) = 0 - x = -x$. La continuité ne pose de problème qu'en 0, mais comme $\lim_{x \to 0^-} -x = \lim_{x \to 0^+} x = 0 = |0|$, ça marche. Pour la dérivée, en amdettant très provisoirement que l'identité a pour dérivée 1, ça découle de la première propriété donnée. $\square$

2.2 Fonctions polynomiales

Définition 7. Les fonctions puissances entières sont définies par récurrence : pour $n = 0$, la fonction $x \mapsto x^0$ est constante égale à 1. Ensuite, pour $n \geqslant 0$, $x^{n+1} = x.x^n$. Enfin, si $n \leqslant 0$, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, définie sur $\mathbb{R}^*$.

Proposition 7. Les fonctions puissances sont continues et dérivables sur leur ensemble de définition, et on a $\forall n \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^{(*)}$, si $f : x \mapsto x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$. De plus, une fonction puissance paire est paire et une fonction puissance impaire est impaire (d'où la terminologie, en fait). Quelques courbes représentatives :



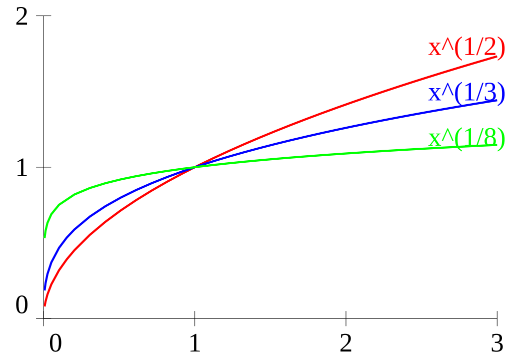
Démonstration. On va prouver dérivibalité et continuité d'un coup pour les puissances positives en calculant la dérivée. Procédons par récurrence sur n. Pour $n = 1$, le taux d'accroissement de la fonction identité en a vaut $\dfrac{x-a}{x-a} = 1$, qui a bien évidemment pour limite 1, donc f est dérivable de dérivée constante égale à 1. Supposons maintenant $x \mapsto x^n$ dérivable de dérivée nx^{n-1} $(n \geqslant 1)$, la fonction $x \mapsto x^{n+1}$ est alors dérivable comme produit de x et x^n, toutes deux fonctions dérivables, et sa dérivée vaut $1.x^n + x.nx^{n-1} = (n+1)x^n$, ce qui prouve la formule. Les puissances négatives s'obtiennent ensuite par inversion des précédentes : la dérivée de $\dfrac{1}{x^n}$ vaut $\dfrac{-nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$, ce qui correspond bien à la formule donnée. □

Définition 8. Une fonction f est dite polynomiale de degré n s'il existe des réels a_0, a_1, …, a_n, avec de plus $a_n \neq 0$, telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Une telle fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et admet si $n \geqslant 1$ une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$ et en $-\infty$ (si $n = 1$, elle admet évidemment une asymptote oblique avec laquelle elle est confondue).

Définition 9. Une fonction qui s'écrit comme quotient de deux fonctions polynomiales est appelée fonction rationnelle. Elle n'est en général pas définie sur $\mathbb{R}$.

Remarque 8. Rappelons que faut de mieux, on continuera pour l'instant à calculer les limites de fonctions rationnelle aux infinis en factorisant le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

Définition 10. Pour $n \geqslant 2$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction racine n-ème comme étant la réciproque de la fonction puissance n-ème. On la note $f : x \mapsto \sqrt[n]{(x)}$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $\dfrac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}$. Elle admet une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$. Exemples de courbes :



Démonstration. Pour avoir l'existence de ces fonctions, il faudrait déjà prouver la bijectivité des fonctions puissances de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. N'ayant pas tout à fait les moyens de démontrer ces résultats, nous les admettrons provisoirement. La continuité est également admise. On peut juste faire le calcul de dérivée : f est la réciproque de la fonction $g : x \mapsto x^n$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ (la fonction n'est pas dérivable en 0 car sa réciproque y a une dérivée nulle), $f'(x) = \dfrac{1}{g'(f(x)} = \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$, ce qui donne bien le résultat annoncé. $\square$

Tous les résultats concernant les fonctions réciproques qui ne sont pas montrés ici découlent du théorème suivant :

Théorème 1. Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est bijective de I sur $f(I)$ et sa réciproque est continue.

3 Logarithmes et exponentielles

Éternel dilemme du professeur de maths au moment d'aborder cette partie du cours : exponentielle d'abord ou logarithme en premier ? Quel que soit le choix, soyez conscients que la construction s'appuiera à ce stade sur des résultats puissants que nous ne serons pas en mesure de démontrer : existence d'une primitive à une fonction continue pour le logarithme, existence d'une solution à une équation différentielle pour l'exponentielle. J'ai finalement choisi de commencer avec l'exponentielle car nous verrons bientôt une façon de la construire (chapitre sur les équations différentielles, justement).

3.1 La fonction exponentielle

Définition 11. La fonction exponentielle, notée exp, est l'unique solution de l'équation différentielle $f' = f$ valant 1 pour $x = 0$.

Remarque 9. Une bonne définition de cette fonction est en fait $\exp(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, mais cela suppose de savoir manipuler des sommes infinies (on parle alors de séries), que vous étudierez plutôt l'an prochain.

Proposition 8. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle admet pour limite 0 en $-\infty$ (on a même $\lim\limits_{x \to -\infty} x \exp(x) = 0$) et une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$. On a par ailleurs, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. En particulier, $\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$, et en notant $e = \exp(1)$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exp(n) = e^n$. Pour cette raison, on note $\exp(x) = e^x$ (ce qui a un sens pour x rationnel, mais n'est qu'une notation dans le cas général). La courbe de la fonction est tracée dans le paragraphe suivant.

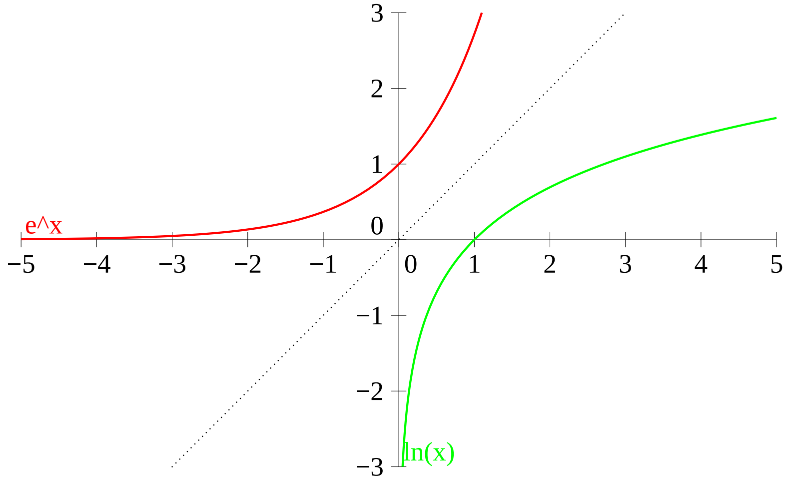
Démonstration. On ne peut en fait pas prouver grand chose à partir de la définition que j'ai prise. Essayons de prouver tout de même que $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. Si on considère y fixé et qu'on dérive $\exp(x+y)$ par rapport à x, on obtient $\exp(x+y)$, donc cette fonction de la variable x est une solution de l'équation $f' = f$, donc de la forme $K\exp(x)$ (en admettant encore une fois la forme des solutions de cette équation différentielle). Comme elle vaut $\exp(y)$ pour $x = 0$, on a $K = \exp(y)$, ce qui prouve la formule. On en déduit que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)\exp(-x) = \exp(x-x) = 1$, donc $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$, et par récurrence sur n que $\exp(n) = e^n$ (c'est vrai par définition de e pour ${}^n = 1$, et en le supposant vrai pour une valeur de n, on a $\exp(n+1) = \exp(n)\exp(1) = e^n \times e = e^{n+1}$. On peut en déduire que, si $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\exp(r) = e^r$ (en effet $\exp(q \times \frac{1}{q}) = (\exp(\frac{1}{q}))^q = e$, donc $\exp(\frac{1}{q}) = e^{\frac{1}{q}}$, et il ne reste plus qu'à élever à la puissance p). En particulier, les images de tous les rationnels par la fonction exponentielle sont positives. Pour passer aux réels, il faut hélas des propriétés que nous n'avons pas en notre possession, on admet donc la dernière étape. Une fois l'exponentielle positive, sa dérivée l'est donc elle est croissante. Pour obtenir la branche parabolique à l'infini, trichons encore un peu en utilisant les propriétés de l'intégrale : $\forall x \geqslant 0$, $e^x \geqslant 1$, donc $\displaystyle\int_0^x e^t\ dt \geqslant \int_0^x 1\ dt$, soit $e^x - 1 \geqslant x$, donc $e^x \geqslant x + 1$ (inégalité à retenir). On recommence et on obtient $e^x - 1 \geqslant \displaystyle\int_0^x (t+1)\ dt = \frac{x^2}{2} + x$, donc $e^x \geqslant \dfrac{x^2}{2} + x + 1$, ce qui suffit à prouver que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Remarquez au passage qu'on peut facilement montrer par récurrence que $\forall x \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^x \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, ce qui nous rapproche de la définition donnée en remarque. Pour obtenir la limite en $-\infty$, il suffit d'utilise $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$: si $\dfrac{e^x}{x^2}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, $\dfrac{x^2}{e^x} = (-x)^2 e^{-x}$ tend vers 0, ce qui prouve l'affirmation souhaitée, et même plus ! En fait, la même récurrence prouve que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^n e^x) = 0$, pour tout entier positif n. □

3.2 La fonction ln

Définition 12. La fonction ln (logarithme népérien) est définie sur $\mathbb{R}_+$ comme la réciproque de l'exponentielle.

Proposition 9. Le logarithme est continu, dérivable sur son domaine de définition, de dérivée $\dfrac{1}{x}$. Il est donc croissant sur $\mathbb{R}_+^*$, admet pour limite $-\infty$ en 0^+ et une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Enfin, on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, et en particulier $\ln\dfrac{1}{x} = -\ln x$. La courbe, ainsi que celle de l'exponentielle :

Démonstration. Une fois prouvée les propriétés de l'exponentielle, c'est plus facile pour le logarithme. Il est dérivable comme réciproque de fonction dérivable, et $\ln'(x) = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$. De plus, $e^{x+y} = e^x e^y \Rightarrow e^{\ln x + \ln y} = x + y$, donc $\ln x + \ln y = \ln(xy)$. Les autres propriétés en découlent (par récurrence pour $\ln(x^k) = k\ln x$), et les limites se démontrent en utilisant des propriétés non encore vues en cours : par exemple ln est croissante et ne peut être majorée (elle est surjective puisque réciproque de l'exponentielle) donc tend vers $+\infty$ en $+\infty$. □

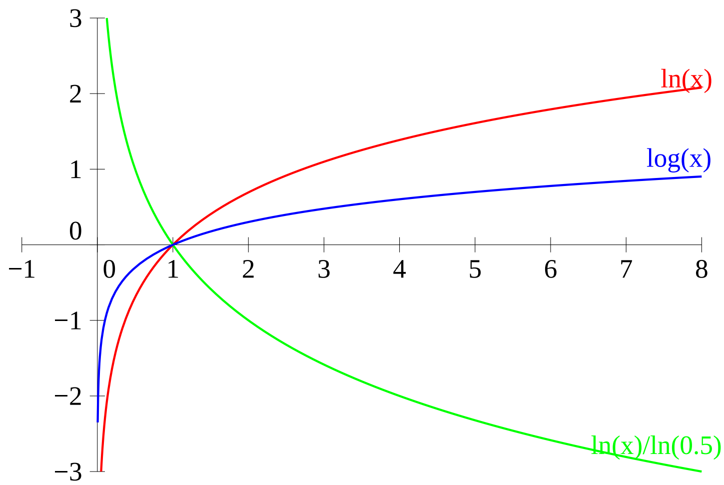


3.3 Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances quelconques

Définition 13. Pour $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, on définit la fonction logarithme en base a par $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Autrement dit, le *log* en base e est le logarithme népérien. On note simplement log le logarithme décimal (c'est-à-dire en base 10).

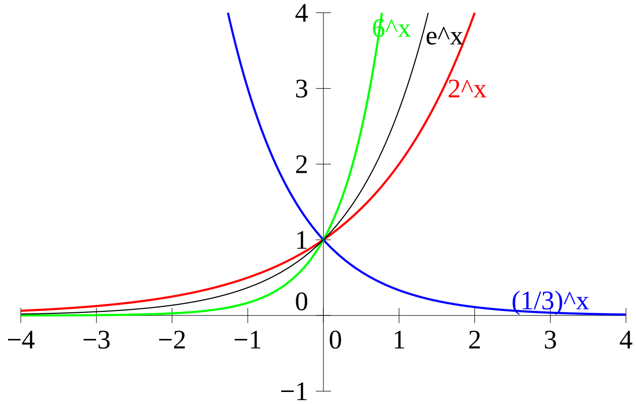
Proposition 10. Les fonctions logarithmes sont strictement croissantes quand $a > 1$, strictement décroissantes sinon. Elles vérifient $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

Exemples de courbes :



Définition 14. La fonction exponentielle de base a est définie, pour $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, par $\exp_a(x) = e^{x \ln a}$. La fonction exponentielle usuelle est donc l'exponentielle de base e.

Proposition 11. L'exponentielle de base a est en fait la réciproque de la fonction logarithme de base a. Elle est décroissante sur $\mathbb{R}$ si $a < 1$, croissante sur $\mathbb{R}$ sinon. Elle vérifie $\exp_a(x + y) = \exp_a(x).\exp_a(y)$. On note plus fréquemment $\exp_a(x) = a^x$. Un ou deux exemples de courbes :



Démonstration. On a en effet $\exp_a(x) = y \Leftrightarrow e^{x \ln a} = y \Leftrightarrow \ln y = x \ln a$ (le membre de gauche étant positif, on peut prendre le ln), donc $x = \log_a(y)$, les deux fonctions sont bien réciproques l'une de l'autre. Les autres propriétés sont évidentes. $\square$

Définition 15. Soit $a \in \mathbb{R}^*$, on définit la fonction puissance de base a sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x^a = e^{a \ln x}$.

Remarque 10. Cette définition prolonge bien celle donnée pour les puissances entières puis rationnelle un peu auparavant. Pour les puissances entières par exemple, on a vu que $k \ln x = \ln(x^k)$, donc $e^{k \ln x} = x^k$.

Proposition 12. Toutes les fonctions puissance positives ont pour limite 0 en 0 et y sont souvent prolongées par continuité. Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, et la dérivée de $x \mapsto x^a$ est la fonction $x \mapsto ax^{a-1}$. La fonction est donc croissante si $a > 0$ et décroissante si $a < 0$. La fonction puissance de base $\dfrac{1}{a}$ est la réciproque de la fonction puissance de base a. Pas d'exemples de courbes cette fois-ci, elles ressemblent aux fonctions puissances déjà étudiées.

Démonstration. Pour la limite en 0, il suffit de composer les limites : $\ln x$ tend vers $-\infty$, donc $a \ln x$ aussi, et e^y tend vers 0 quand y tend vers $-\infty$. La dérivée n'est pas difficile non plus : soit $f_a(x) = e^{a \ln x}$, alors $f_a'(x) = \dfrac{a}{x} e^{a \ln x} = a \dfrac{e^{a \ln x}}{e^{\ln x}} = a e^{(a-1) \ln x} = a x^{a-1}$. $\square$

Proposition 13. Croissances comparées

Soient $a > 0$ et $b > 0$, alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{b^x}{x^a} = +\infty$ (ou $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{b^x} = 0$).

Soient $a > 0$ et $b > 0$, alors $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^a (\ln x)^b = 0$.

Remarque 11. La limite du quotient d'une exponentielle par un logarithme en $+\infty$ est donc bien entendu égale à $+\infty$.

Démonstration. Prouvons la première limite : $\dfrac{b^x}{x^a} = \dfrac{e^{x \ln b}}{e^{a \ln x}} = e^{x \ln b - a \ln x}$. Or, l'exposant tend vers $+\infty$ (il suffit de le factoriser par x pour s'en rendre compte), d'où le résultat. $\square$

3.4 Dérivation de fonctions issues d'exponentielles

Remarque 12. Les définitions précédentes permettent notamment de dériver des fonctions de la forme u^v, lorsque u est à valeurs strictement positives. On a par définition $u^v(x) = e^{v(x) \ln(u(x))}$, donc $(u^v)' = \left(v' \ln \circ u + \dfrac{vu'}{u}\right) u^v$.

Définition 16. Soit f une fonctions définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs **complexes**. On a donc $f = f_1 + if_2$, où f_1 et f_2 sont deux fonctions à valeurs réelles. Si ces deux fonctions sont dérivables sur I, on dit que f est dérivable et on appelle dérivée de f la fonction $f' : x \mapsto f_1'(x) + if_2'(x)$.

Proposition 14. Les formules de dérivation d'une somme et d'un produit restent valables pour des fonctions à valeurs complexes. De plus, si g est une fonction complexe dérivable, e^g l'est aussi, et sa dérivée est $g'e^g$.

Démonstration. Les formules pour somme et produit découlent directement du cas réel : par exemple pour le produit, si $f = f_1 + if_2$ et $g = g_1 + ig_2$, $fg = (f_1g_1 - f_2g_2) + i(f_1g_2 + f_2g_1)$, donc $(fg') = (f_1'g_1 + f_1g_1' - f_2'g_2 - f_2g_2') + i(f_1'g_2 + f_1g_2' + f_2'g_1 + f - 2g_1')$ et $f'g + fg' = (f_1' + if_2')(g_1 + ig_2) + (f_1 + if_2)(g_1' + ig_2')$ pour le même résultat.

Pour l'exponentielle, posons $g = g_1 + ig_2$, on a donc $e^g = e^{g_1}e^{ig_2} = \cos g_2 e^{g_1} + i \sin g_2 e^{g_1}$, donc $(e^g)' = -g_2' \sin g_2 e^{g_1} + g_1' \cos g_2 e^{g_1} + ig_2' \cos g_2 e^{g_1} + ig_1' \sin g_2 e^{g_1} = g_1' e^{ig_2} e^{g_1} + ig_2' e^{ig_2} e^{g_1} = g' e^g$. □

4 Fonctions hyperboliques et trigonométriques réciproques

4.1 Fonctions hyperboliques

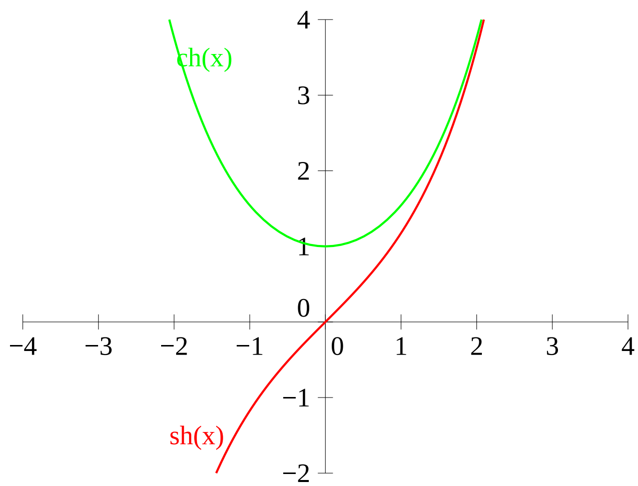
Définition 17. Les fonctions cosinus, sinus et tangente hyperbolique sont définies sur $\mathbb{R}$ par $\text{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\text{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $\text{th}x = \dfrac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Proposition 15. Pour tout réel x, on a $\text{ch}^2x - \text{sh}^2x = 1$.

Démonstration. $\text{ch}^2x + \text{sh}^2x = \dfrac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - e^{2x} - e^{-2x} + 2) = 1$. □

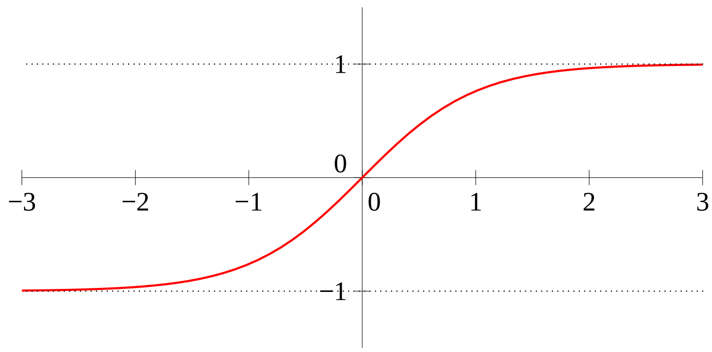
Remarque 13. Il existe tout un tas d'autres formules de trigonométrie hyperboliques, ressemblant souvent aux formules de trigonométrie classiques, voir les exercices pour quelques exemples.

Proposition 16. La fonction ch est paire, la fonction sh impaire. Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\text{ch}' = \text{sh}$; $\text{sh}' = \text{ch}$. Le cosinus hyperbolique est donc décroissant sur $\mathbb{R}_-$ et croissant sur $\mathbb{R}_+$, alors que le sinus hyperbolique est croissant sur $\mathbb{R}$. Les courbes sont les suivantes :



Démonstration. Tout ceci est assez facile : $\text{ch}(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^x}{2} = \text{ch}x$; $\text{sh}(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\text{sh}x$; $\text{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}x$, et de même pour sh'. Quand aux signes, ch est positive comme somme de deux exponentielles, sh est donc croissante et s'annule en 0, elle est donc négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. □

Proposition 17. La fonction th est impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $\text{th}' = 1 - \text{th}^2 = \dfrac{1}{\text{ch}^2}$. Elle est croissante sur $\mathbb{R}$, et admet pour asymptotes horizontales les droites d'équation $y = -1$ en $-\infty$ et $y = 1$ en $+\infty$. La courbe :

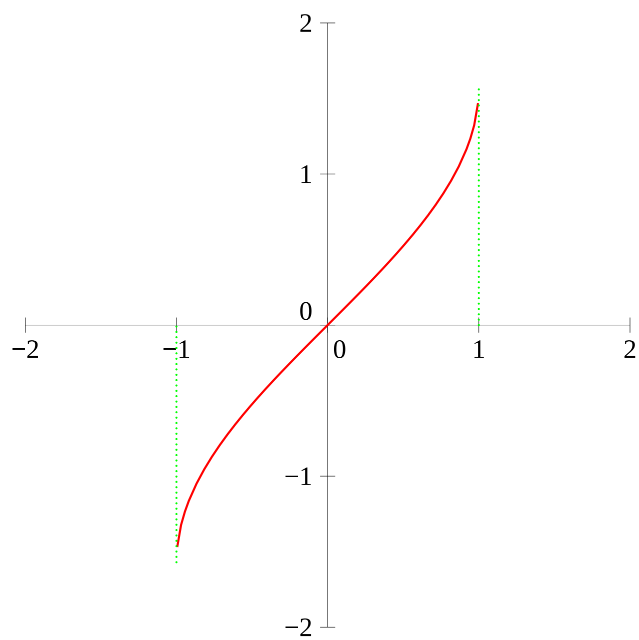


Démonstration. th est impaire comme quotient d'une fonction paire et d'une imapire. De plus, $\text{th}' = \dfrac{\text{ch}^2 - \text{sh}^2}{\text{ch}^2} = \dfrac{1}{\text{ch}^2} = 1 - \text{th}^2$. Les calculs de limites sont évidents. □

4.2 Fonctions trigonométriques réciproques

Définition 18. La fonction sin étant strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, elle y est bijective vers l'intervalle image $[-1; 1]$. On peut donc définir sur $[-1; 1]$ la réciproque de $\sin_{|[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$, cette fonction est appelée arcsinus et notée arcsin.

Proposition 18. La fonction arcsin est impaire, continue sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $]-1; 1[$, de dérivée $\arcsin'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$. Elle est strictement croissante sur son domaine de définition.



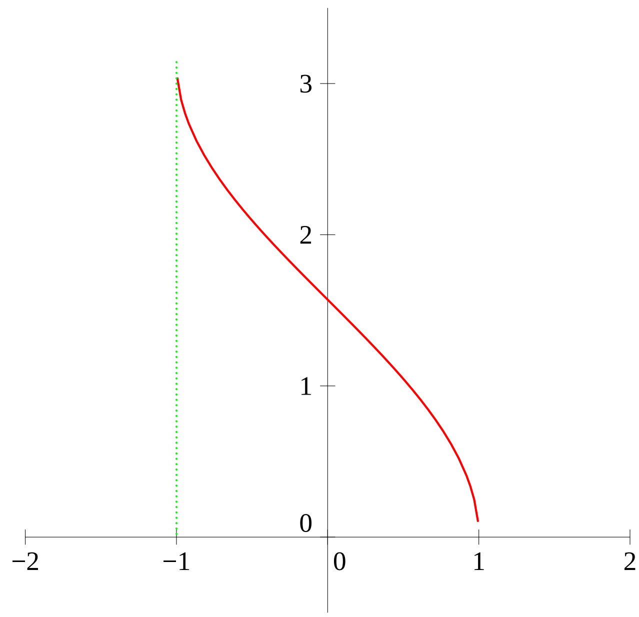
Démonstration. L'imparité et la croissance d'arcsin découlent de celles du sinus. Pour la dérivée, il suffit de reprendre la formule désormais bien connue pour les dérivées de réciproques : $\arcsin'(y) =$

$\dfrac{1}{\sin'(\arcsin y)} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin y)}$. La fonction arcsin étant à valeurs dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, et le cosinus étant positif sur cet intervalle, on a $\cos(\arcsin y) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y))} = \sqrt{1 - y^2}$, d'où la fomule pour la dérivée. □

Remarque 14. Le fait que $\sin(\arcsin y) = y$, utilisé dans la démonstration, n'est vrai que si $y \in [-1; 1]$.

Définition 19. La fonction cos est strictement décroissante sur $[0; \pi]$, donc y est bijective vers son intervalle image $[-1; 1]$. On définit la fonction arccosinus sur $[-1; 1]$ (notée arccos) comme la réciproque de $\cos_{|[0;\pi]}$.

Proposition 19. La fonction arccos est paire, continue sur $[-1; 1]$ et dérivable sur $]-1; 1[$, de dérivée $\arccos'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$. Elle est strictement décroissante sur son domaine de définition.



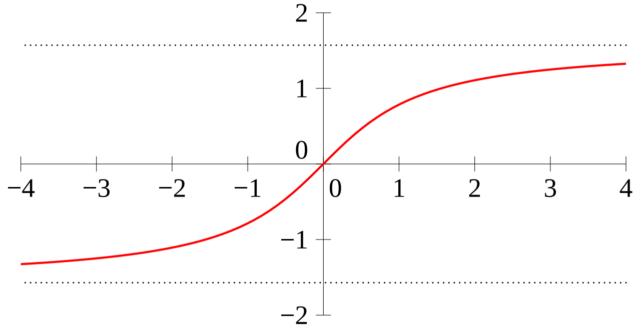
Démonstration. La preuve est exactement la même que pour arcsin. □

Remarque 15. On a en fait, $\forall x \in [-1; 1]$, $\arccos y = -\arcsin y + \dfrac{\pi}{2}$.

Définition 20. La fonction tan est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$, elle y effectue donc une bijection vers son intervalle image $\mathbb{R}$. La fonction arctangente est défini sur $\mathbb{R}$ comme la réciproque de $\tan_{|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}$.

Proposition 20. La fonction arctan est imapire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\arctan'(y) = \dfrac{1}{1 + y^2}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec pour limites respectives $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$ en $-\infty$ et $+\infty$.

Démonstration. Comme d'habitude, contentons-nous du calcul de la dérivée, qui est ici facile : $\arctan'(y) = \dfrac{1}{\tan'(\arctan y)} = \dfrac{1}{(1 + \tan^2)(\arctan y)} = \dfrac{1}{1 + y^2}$. □

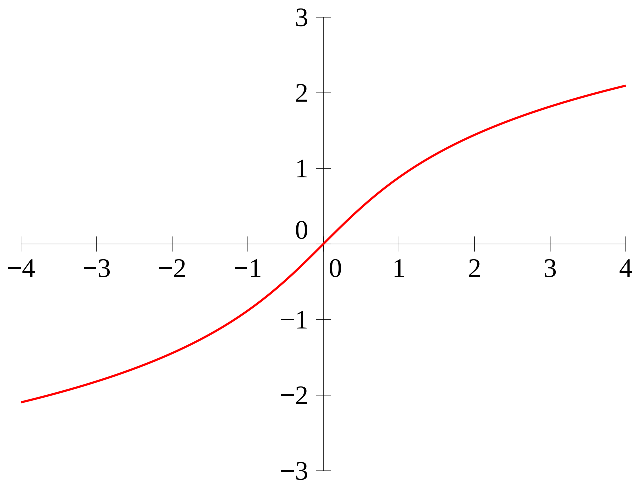


4.3 Fonctions hyperboliques réciproques

De la même façon que pour les fonctions circulaires, on peut définir des fonctions hyperboliques réciproques.

Définition 21. La fonction sh étant bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit la fonction argument sinus hyperbolique, ou argsh, comme étant sa réciproque.

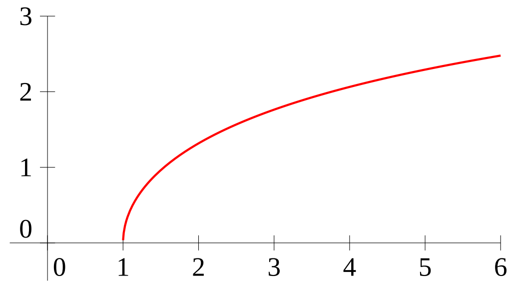
Proposition 21. La fonction argsh est impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\text{argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Démonstration. Encore une fois, pas grand chose à prouver, ça fonctionne comme dans le cas des fonctions réciproques circulaires. Le calcul de la dérivée est exactement similaire à celui de la dérivée d'arcsin, en utilisant la formule $\text{sh}^2 - \text{ch}^2 = 1$. □

Définition 22. La fonction ch étant strictement croissante, donc bijective $\mathbb{R}_+^*$, on peut définir la fonction argument cosinus hyperbolique, ou argch, comme étant sa réciproque, définie sur $[1; +\infty[$.

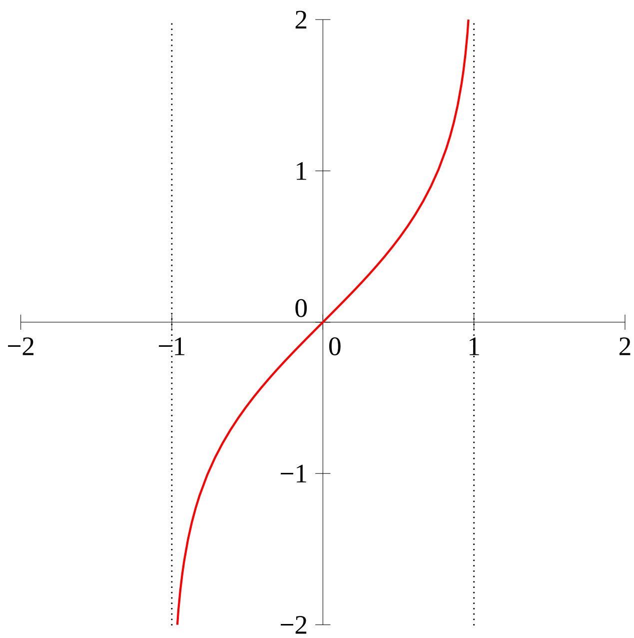
Proposition 22. La fonction argch est continue sur $[1; +\infty[$ et dérivable sur $]1; +\infty[$, de dérivée $\text{argch}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. Elle est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.



Démonstration. Laissée au lecteur, rien de neuf sous le soleil. □

Définition 23. La fonction th étant bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$, on définit la fonction argument tangente hyperbolique, ou argth, comme étant sa réciproque, définie sur $]-1;1[$.

Proposition 23. La fonction argth est impaire, continue et dérivable sur $]-1;1[$, de dérivée $\text{argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. Elle est strictement croissante sur $]-1;1[$.



Démonstration. Ici aussi, la preuve est la même quand dans le cas d'arctan, à un petit signe près dans le calcul de la dérivée. □

5 Formulaire de dérivées à connaitre

Juste un petit tableau récapitulatif des dérivées à savoir par coeur :

fonction	dérivée	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}_{f'}$	condition
c	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$c \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}^*$
$\dfrac{1}{x^n}$	$-\dfrac{n}{x^{n-1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{N}^*$
x^a	ax^{a-1}	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	$a \geqslant 1$
x^a	ax^{a-1}	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$0 < a < 1$
x^a	ax^{a-1}	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$a < 0$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	
a^x	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\log_a(x)$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right\}$	
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1;1]$	$]-1;1[$	
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1;1]$	$]-1;1[$	
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\mathrm{sh}x$	$\mathrm{ch}x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\mathrm{ch}x$	$\mathrm{sh}x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\mathrm{th}x$	$1 - \mathrm{th}^2 x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\mathrm{argsh}x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	
$\mathrm{argch}x$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$[1;+\infty[$	$]1;+\infty[$	
$\mathrm{argth}x$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$]-1;1[$	$]-1;1[$	