Exercices sur les ensembles finis : corrigé

PCSI 2 Lycée Pasteur

11 octobre 2007

Exercice 1

Pour $n = 1$, la somme se réduit à $1 \times 1! = 1$, et $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 1$, donc l'égalité est vérifiée. Supposons la formule vraie au rang n, et calculons $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k \times k! = \sum_{k=1}^{n} k \times k! + (n+1) \times (n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1) \times (n+1)! = (n+1)!(n+2) - 1 = (n+2)! - 1$, donc la formule est vérifiée au rang $n+1$. Par principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier supérieur ou égal à 1.

Exercice 2

Pour $n = 0$, $\dbinom{2n}{n} = 0$, et $\dfrac{4^0}{1} = 4^0 = 1$, donc les inégalités sont vraies. Supposons l'inégalité de droite vérifiée au rang n, on a alors $\dbinom{2n+2}{n+1} = \dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2 n!^2} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1}\dbinom{2n}{n} \leqslant 4\dbinom{2n}{n} \leqslant 4 \times 4^n \leqslant 4^{n+1}$, donc l'inegalité reste vraie au rang $n+1$. À gauche, c'est un peu plus technique : $\dbinom{2n+2}{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+1}\dbinom{2n}{n} \geqslant \dfrac{2(2n+1)}{n+1} \times \dfrac{4^n}{n+1} \geqslant \dfrac{2(2n+1)}{n+1} \times \dfrac{n+2}{4(n+1)} \times \dfrac{4^{n+1}}{n+2} \geqslant \dfrac{2n^2+5n+4}{2n^2+6n+4} \times \dfrac{4^{n+1}}{n+2} \geqslant \dfrac{4^{n+1}}{n+2}$, donc l'inégalité reste également vraie au rang $n+1$. Par principe de récurrence, les deux inégalités sont vraies pour tout entier n.

Exercice 3

Pour conjectureer la formule, calculons quelques termes supplémentaires de la suite : $u_3 = 6$; $u_4 = 18 - 6 = 12$; $u_5 = 36 - 18 + 2 = 20$; $u_6 = 60 - 36 + 6 = 30$; $u_7 = 90 - 60 + 12 = 42$. On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n-1)$. Prouvons-le par récurrence triple sur n. C'est vrai pour $n = 0 : 0 = 0 \times (-1)$; $n = 1 : 0 = 1 \times 0$; et $n = 2 : 2 = 2 \times 1$; Supposons la forume vraie aux rangs n, $n+1$ et $n+2$ alors $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + n(n-1) = 3n^2 + 9n + 6 - 3n^2 - 3n + n^2 - n = n^2 + 5n + 6 = (n+3)(n+2)$, donc la formule reste vraie au rang $n+3$. Par principe de récurrence triple, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n-1)$.

Exercice 4

On peut faire la preuve par récurrence quintuple (mais oui !). On fait une initialisation quintuple à partir de $n = 24$: $24 = 2 \times 5 + 2 \times 7$; $25 = 5 \times 5$; $26 = 5 + 3 \times 7$; $27 = 4 \times 5 + 7$ et $28 = 4 \times 7$, donc la propriété est vérifiées aux rangs 24 à 28. Supposons la désormais vérifiée aux rangs n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ et $n+4$, on a alors en particulier $n = 5a + 7b$, avec $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, donc $n + 5 = 5a + 7b + 5 = 5(a+1) + 7b$. La propriété est donc egalement vérifiée au rang $n+5$. Par principe de récurrence multiple, en l'occurence quintuple, elle est vrai pour tout entier supérieur ou égal à 24.

Exercice 5

Pour $n=1$, on a $\prod_{k=1}^{1}(4k-2)=2$, et $\prod_{k=1}^{1}(1+k)=2$, donc l'égalité est vérifiée. Supposons-la vraie au rang n. On a alors, au rang $n+1$, $\prod_{k=1}^{n+1}(4k-2)=(4(n+1)-2)\prod_{k=1}^{n}(4k-2)=(4n+2)\prod_{k=1}^{n}(n+k)=2(2n+1)\prod_{j=0}^{n-1}(n+1+j)=2(2n+1)(n+1)\prod_{j=1}^{n-1}(n+1+j)=(n+1+n)(n+1+n+1)\prod_{j=1}^{n-1}(n+1+j)=\prod_{j=1}^{n+1}(n+1+j)$, ce qui prouve la formule au rang $n+1$. Par principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n\geqslant 1$.

Exercice 6

On a $(A\backslash B)\cup(A\cap B)=A$ et cette union est disointe, donc $|A\backslash B|=|A|-|A\cap B|$. On en déduit $|A\Delta B|=|A\backslash B|+|B\backslash A|=|A|+|B|-2|A\cap B|$.

Exercice 7

$|(A\cup B)\cup C|=|A\cup B|+|C|-|(A\cup B)\cap C|=|A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$.

La formule de Poincaré se démontre ensuite par récurrence :

Démontrer la formule donnée en remarque dans le cours pour le cardinal de $A\cup B\cup C$. Démontrer ensuite la formule de Poincaré : $card(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n}card(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})$.

Exercice 8

Fixon le cardinal k de l'ensemble Y. Il reste alors $\binom{n}{k}$ choix pou cet ensemble Y, puis 2^k choix pour X (c'est le nombre de sous-ensemble de Y). Le nombre total de couples convenables est donc $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k=(2+1)^n=3^n$ d'après le binome de Newton.

Exercice 9

- Une application strictement croissante est déterminée par un p-uplet de l'ensemble d'arivée. En effet, le plus petit élément de ce p-uplet sera nécessairement l'image de 1, le plus élément restant celle de 2, etc. il y a donc $\binom{n}{p}$ telles applications.
- Notons $S_{n,p}$ le nombre de telles applications. Soit une telle application f. Si $f(1)=1$, $f_{|\{2;3;\dots;p\}}$ est une application croissante vers $\{1;\dots;n\}$, et il y a $S_{n,p-1}$ telles applications. Si $f(1)\neq 1$, cela signifie que f est à valeurs dans $\{2;\dots;n\}$, et il y a $S_{n-1,p}$ telles applications. Autrement dit, $S_{n,p}=S_{n-1,p}+S_{n,p-1}$. Une observation des petites valeurs de n et p permet de conjecturer que $S_{n,p}=\binom{p}{n+p-1}$, prouvons par récurrence sur $n+p$. Pour $n+p=2$, donc $n=p=1$, il n'y a qu'une application possible, et $\binom{1}{1}=1$, donc la formule est vraie. Supposons la vraie pour toutes les valeurs de n et p telles que $n+p=k$ et prouvons la formule pour $n+p=k+1$. Si $n=1$, c'est évident (il y a une seule application possible, l'application constante égale à 1, et $\binom{p}{p}=1$), sinon, $S_{n,p}=S_{n-1,p}+S_{n,p-1}$. Comme $n-1+p=n+p-1=k$, on peut appliquer

l'hypothèse de récurrence : $S_{n,p} = \binom{p}{n+p-2} + \binom{p-1}{n+p-2} = \binom{p}{n+p-1}$ par la formule de Pascal, donc la formule est bien vérifiée.

- C'est très similaire au cas précédent : on a cette fois-ci $S_{n,p} = S_{n-1,p} + S_{n-2,p-1}$, et on obtient par récurrence $S_{n,p} = \binom{p}{n-p+1}$.

Exercice 10

On pose $P(X) = aX^4+bX^3+cX^2+dX+E$, on a alors $P(X+1)-P(X) = aX^4+4aX^3+6aX^2 = 4aX+a+bX^3+3bX^2+3bX+b+cX^2+2cX+c+dX+d+e-aX^4-bX^3-cX^2-dX-e = X^3$, soit $4aX^3+(6a+3b)X^2+(4a+3b+2c)X+(a+b+c+d) = X^3$. On doit donc avoir $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$, et $d = 0$. On en déduit que $\sum_{k=0}^{n} k^3 = P(n+1)-P(1) = \frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{1}{2}(n+1)^3 + \frac{1}{4}(n+1)^2 = \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+2n+1-2n-2+1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 11

On peut commencer par remarquer que $\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} = \frac{(k+1)(k+2)-2k(k+2)+k(k+1)}{2k(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+3k+2-2k^2-4k+k^2+k}{2k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. On a donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(k+2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)}$.

Exercice 12

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i2^j = (\sum_{i=1}^{n} i)(\sum_{j=1}^{n} 2^j) = \frac{n(n+1)}{2}(2^{n+1}-2).$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Exercice 13

Ce sont des produits télescopiques : $\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k}) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{2}{n+1}$ et $\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2}) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k+1)(k-1)}{k^2} = \frac{n+1}{2n}$.

Exercice 14

Ce n'est pas très dur en fait : $\sum_{\substack{(m,n,k)\in\mathbb{N}^3 \\ m+n+k=p}} mnk = \sum_{k=1}^{p} k(\sum_{n=1}^{p-k} n(\sum_{m=1}^{p-n-k} m))) = \sum_{k=1}^{p} k(\sum_{n=1}^{p-k} n\frac{(p-n-k)(p-n-k+1)}{2}$

Exercice 15

Il vaut $\frac{12!}{2!\times 2!\times 3!}$ (on divise par $k!$ pour chaque lettr eapparaissant k fois).

Exercice 16

La première est une simple application du binome de Newton : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$. Pour les autres, il faut ruser un peu : on remarque que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. On peut dériver ce polynome par rapport à x, cela donne $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$. En appliquant cette formule à $x=1$, on obtient $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$. De même, en dérivant une deuxième fois, on a $\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$. On a donc $\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$.

Exercice 17

- Il y a $\binom{32}{5}$ tirages possibles.
- Il y a $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3}$ tirages possibles.
- C'est plus simple de passer par le complémentaire, on obtient $\binom{32}{5} - \binom{24}{5}$ tirages possibles.
- Il faut distinguer deux cas : l'As de carreau, un autre carreau, et trois cartes qui ne sont ni des As ni des carreaux, ou un As qui ne soit pas de carreau, deux carreaux qui ne sont pas des As et deux cartes parmi celles qui restent. Cela fait $\binom{7}{1} \times \binom{21}{3} + \binom{3}{1} \times \binom{7}{2} \times \binom{21}{2}$ tirages possibles.
- Il y a $\binom{8}{5}$ tirages possibles.
- On peut commencer par choisir les hauteurs des paires (8 possibilités) puis les deux cartes dans chaque paire et enfin la dernière carte, cela fait $\binom{8}{2} \times \binom{4}{2}^2 \times 24$ tirages possibles.
- Pour chaque couleur, il y a $\binom{8}{5}$ tirages possibles, donc au total $4 \times \binom{8}{5}$ tirages.
- Il n'y a que 16 quintes flush possibles.

Exercice 18

Cet exercice est absolument idiot : il y a $\binom{a+b}{n}$ façon de former un groupe de n personnes, mais en considérant que ce groupe est formé de k hommes et $n-k$ femmes, pour un certain k pouvant varier entre 0 et n, il vaut aussi $\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$, d'où l'identité.