

Exercices sur le dénombrement : corrigé

ECE1 Lycée Kastler

18 janvier 2008

Exercice 1

Commençons par remarquer qu'il y a au total $13^4 = 28\,561$ tirages possibles.

- Au moins une boule blanche : on passe par le complémentaire, il y a $13^4 - 8^4 = 24\,465$ tirages.
- Au plus une boule noire : soit zéro soit une boule noire, donc $5^4 + 5^3 \times 8 \times \binom{4}{1} = 4\,625$ tirages (le dernier coefficient binomial pour le choix de la position de la boule noire).
- Trois boules noires puis une blanche : $8^3 \times 5 = 2\,560$ tirages (pas de choix pour l'ordre ici).
- Deux noires et deux blanches : $8^2 \times 5^2 \times \binom{4}{2} = 9\,600$ tirages possibles.

Exercice 2

Il y a au total $\binom{21}{5}$ tirages possibles.

- Au moins un multiple de cinq : $\binom{21}{5} - \binom{17}{5}$ tirages possibles (par passage au complémentaire, il y a 17 atouts qui ne sont pas des multiples de cinq).
- Un multiple de cinq et un de trois : il faut distinguer le cas où on tire le 15 (qui est le seul multiple de cinq et de trois à la fois) et celui où les deux multiples sont différents. Sachant qu'il y a onze atouts qui ne sont multiples ni de cinq ni de trois, on a $\binom{11}{4} + \binom{6}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{11}{3}$ tirages possibles.
- Ni le 1 ni le 21 : par passage au complémentaire, $\binom{21}{5} - \binom{19}{5}$ tirages.

Exercice 3

- Aucune condition : $\binom{32}{5} = 201\,376$ tirages.
- Deux Rois : $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 19\,656$ (28 cartes ne sont pas des Rois).
- Au moins un pique : par passage au complémentaire, $\binom{32}{5} - \binom{24}{5} = 158\,872$
- Un Ad et deux carreaux : il faut distinguer le cas de l'As de carreau, ce qui fait $\binom{21}{4}$ (l'As de carreau et quatre cartes parmi les 21 qui ne sont ni des carreaux ni des As) + $\binom{3}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{21}{3}$ (un As qui n'est pas un carreau, un carreau qui n'est pas un As, et trois autres cartes), soit 33 915 tirages.
- Pas de carte en-dessous du 9 : $\binom{24}{5} = 42\,504$ tirages.

- Deux paires : il faut choisir les hauteurs des deux paires (parmi huit possibles), puis les deux cartes pour chaque paire, et enfin la dernière carte, soit $\binom{8}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{24}{1} = 24\,192$ tirages.
- Cinq cartes de la même couleur : $4 \times \binom{8}{5} = 224$ tirages possibles.
- Quinte flush : 16 tirages (là, on peut compter à la main).

Exercice 4

1. Il y a $\binom{6}{2}$ parties à 2 éléments dans E . Soit A l'une d'entre elles, par exemple $A = \{1; 2\}$. Une partie B vérifiant $A \cup B = E$ doit contenir 3, 4, 5 et 6, et un sous-ensemble quelconque de $\{1; 2\}$. Il y a donc 2^2 telles parties B (pour chaque A possible).
2. De la même façon, si A est une partie à k éléments, B doit nécessairement contenir les éléments qui ne sont pas dans A , et un quelconque sous-ensemble des k éléments de E , ce qui laisse 2^k possibilités pour B . Pour $k = 0$, c'est-à-dire si $A = \emptyset$, on a bien une seule possibilité pour B (E tout entier), pour $k = 1$, il y en a 2 (soit B contient l'élément de A , soit non), etc, jusqu'au cas où $k = 6$, c'est-à-dire $A = E$, où on peut prendre pour B n'importe quel sous-ensemble de E , ce qui laisse 2^6 possibilités.
3. Au total, il y a $\binom{6}{0} \times 2^0 + \binom{6}{1} \times 2^1 + \dots + \binom{6}{6} \times 2^6$ possibilités, soit $\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} 2^k$. On reconnaît une formule du binôme, qui vaut $(2 + 1)^6 = 3^6 = 729$.
4. Exactement de la même façon, on obtiendra $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$ possibilités, soit 3^n .

Exercice 5

Application directe de l'exemple vu en cours : il y a $\frac{10!}{4! \times 4!} = 6\,300$ anagrammes pour MISSISSIPI et $\frac{11!}{5! \times 2! \times 2!} = 83\,160$ pour ABRACADABRA.

Exercice 6

Pas vraiment de méthode générale, on va dénombrer au cas par cas :

- s'il n'y a pas d'ex æquo, $4! = 24$ classements.
- s'il y a quatre ex æquo, 1 classement.
- s'il y a trois ex æquo, $\binom{3}{4} \times 2 = 8$ classements (il faut choisir les trois ex æquo, et leur classement).
- s'il y a deux ex æquo, $\binom{2}{4} \times 3! = 36$ classements.
- enfin, s'il y a deux fois deux ex æquo, $\binom{4}{2} = 6$ classements (il suffit de choisir les deux ex æquo de tête).

Il y a donc au total 75 classements possibles.

Exercice 7

Il y a bien entendu $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ grilles possibles. Pour compter le nombre de grilles sans deux numéros consécutifs, on procède ainsi : soit un ensemble de six nombres non consécutifs classés dans l'ordre croissant : $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 \leq 49$. Comme ils ne sont pas consécutifs, on a même $a_1 < a_2 - 1$, et de même $a_2 - 1 < a_3 - 2$ etc, donc $1 \leq a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < a_4 - 3 < a_5 - 4 < a_6 - 5 \leq 44$. Il y a donc exactement autant de grilles sans deux numéros consécutifs que de grilles avec 6 numéros compris entre 1 et 44, soit $\binom{44}{6} = 7\,059\,052$. La proportion est très proche de 50%.

Exercice 8

On lance n fois de suite un dé à 4 faces et on note p_n la probabilité que chacun des quatre résultats possibles apparaisse au moins une fois lors de ces n lancers.

1. Il y a bien sûr 4^n tirages possibles.
2. C'est une application de la formule de Poincaré. Notons A l'ensemble des tirages qui ne font pas apparaître le chiffre 1, B ceux où il n'y a pas de 2, C et D ceux sans 3 et sans 4. On a alors $|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - \dots - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + \dots - |A \cap B \cap C \cap D|$. Les cardinaux de A, B, C et D sont 3^n , ceux de chaque intersection de deux d'entre eux valent 2^n , les intersections trois à trois ont pour cardinal 1, et l'intersection des quatre est vide, donc $|A \cup B \cup C \cup D| = 4 \times 3^n - 6 \times 2^n + 4$. L'ensemble dont on cherche le cardinal étant le complémentaire de $A \cup B \cup C \cup D$, il a pour cardinal $4^n - 4 \times 3^n + 6 \times 2^n - 4$. La probabilité correspondante est $p_n = 1 - \frac{4 \times 3^n}{4^n} + \frac{6 \times 2^n}{4^n} - \frac{4}{4^n}$.
3. Chacun des trois derniers termes est une suite géométrique de raison plus petite que 1, donc tend vers 0. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 1$ (c'est-à-dire que, lorsque n grandit, la probabilité d'obtenir en faisant n lancers au moins une fois chaque face du dé tend à devenir certaine).
4. On vérifie laborieusement que p_n dépasse 0.9 pour $n = 13$.

Exercice 9

Du calcul brutal utilisant bien entendu la formule du binôme de Newton : $(x-3)^5 = x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$; $(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36xy^2 + 54xy^2 + 27y^3$ et $(x-1)^7 = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$.

Exercice 10

La première est une application directe du binôme : $\sum_{k=0}^n (-1)^k = (1-1)^n = 0$. Pour la deuxième, il est en fait plus facile d'utiliser une des formules vues en cours, sachant qu'on peut oublier $k=0$ dans la somme puisque le terme est nul : $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n \times 2^{n-1}$. Enfin, pour la dernière, on utilise la même astuce mais en commençant par calculer une autre somme : $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} = n \sum_{k=2}^n (k-1) \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-1}{k} = n \sum_{k=1}^{n-1} (n-1) \binom{n-2}{k-1} = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} = n(n-1)2^{n-2}$. Maintenant, reste à remarquer que $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n (k(k-1) + k) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$.

$$1) + k) \binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

Exercice 11

C'est un calcul ignoble (on multiplie par 2 pour ne pas avoir de fraction) :

$$2 \left(\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2} \right) = n(n-1) - (n-p)(n-p-1) - (n-q)(n-q-1) + (n-p-q)(n-p-q-1) = n^2 - n - n^2 + np + n + np - p^2 - p - n^2 + nq + n + nq - q^2 - q + n^2 - np - nq - n - np + p^2 + pq + p - nq + pq + q^2 + q = 2pq, \text{ d'où le résultat.}$$

Exercice 12

Prouvons par récurrence sur n que $\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$. Pour $n=0$, la somme se réduit à $\binom{p}{0}$, qui vaut 1, et à droite on a $\binom{p+1}{0} = 1$. Supposons le résultat vrai pour un rang n , on a alors $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n} + \binom{p+n+1}{n+1} = \binom{p+n+2}{n+1}$ par la formule de Pascal. Ceci prouve l'hérédité et achève la récurrence.