Exercices sur les couples de variables aléatoires finies

ECE1 Lycée Dumas

10 mai 2007

Exercice 1

Soient X et Y deux variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli de même paramètre p. On note $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Calculer la loi du couple (U, V). Les deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

Une armoire est constituée de trois tiroirs. On y range une chaussette verte, une rouge et une noire. On note X le nombre de chaussettes que contient le premier tiroir et N le nombre de tiroirs vides. Déterminez la loi conjointe puis les lois marginales du couple (X, N). Les deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 3

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne k contient k boules elles-mêmes numérotées de 1 à k. On tire une urne au hasard, puis une boule au hasard dans cette urne. On note X le numéro de l'urne et Y le numéro de la boule. Déterminer la loi du couple (X, Y), puis les lois marginales. En déduire l'espérance des variables X et Y.

Exercice 4

On considère deux variables aléatoires X et Y telle que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1; 2; \dots; n\}$, et $P((X = i) \cap (Y = j)) = a \times i \times j$.

1. Déterminer la valeur de la constante a.
2. Donner la loi, l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer la loi de Y.
4. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Calculer $P(X = Y)$.
6. On pose $U = max(X, Y)$. Calculer la loi de U.

Exercice 5

Une urne contient $n + 1$ boules numérotées 0 à n. On y tire successivement et avec remise un certain nombre de boules. La variable aléatoire X_k est définie de la façon suivante : $X_1 = 1$, et ensuite $X_i = 1$ si le numéro obtenu au tirage i n'avait jamais été tiré avant, $X_i = 0$ sinon.

1. Déterminer la loi de X_2.
2. Montrer que X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{i-1}$.
3. Montrer que, si $i < j$, on a $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \dfrac{(n-1)^{i-1} n^{j-1}}{(n+1)^{j-1}}$.
4. En déduire la loi du produit $X_i X_j$.

5. Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
6. On note Z_p la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus lors des p premiers tirages. Exprimer Z_p en fonction des variables définies précédemment.
7. En déduire son espérance, et un équivalent simple de celle-ci lorsque p tend vers $+\infty$.

Exercice 6

Trois urnes contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule dans chaque urne et on note X_1, X_2 et X_3 les trois numéros obtenus. On note X le plus grand des numéros obtenus, Z le plus petit, et Y celui du milieu. Déterminer la loi du triplet (X, Y, Z) (qui est définie, comme vous pourriez vous en douter, comme la donnée des probabilités de toutes les intersections de trois événements possibles). En déduire la loi de X, de Y et de Z.

Exercice 7 (EDHEC 99)

Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé Ω. On suppose que X, Y et Z suivent la loi $\mathcal{U}_{\{1;2;\ldots;n\}}$.

1. (a) Donner la loi du couple (X, Y).
   (b) Montrer que : $\forall k \in \{2; 3; \ldots; n+1\}$, $P(X+Y=k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.
   (c) Montrer que : $\forall k \in \{n+1; \ldots; 2n\}$, $P(X+Y=k) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.
2. Utiliser la formule des probabilités totales pour déduire de la première question que

$$P(X+Y=Z) = \frac{n-1}{2n^2}$$

.

3. (a) Montrer que la variable aléatoire $T = n+1-Z$ suit la loi $\mathcal{U}_{\{1;2;\ldots;n\}}$.
   (b) On admet que T est indépendante de X et de Y. Déterminer la probabilité

$$P(X+Y+Z=n+1)$$

.