Corrigé Sujet ESSEC 1995

ECE1 Lycée Dumas

Lundi 2 avril

1. (a) On a déjà vu le cas particulier où $b = 1$ en exercice : $N^2 = \begin{pmatrix} 4b^2 & 4b^2 & 4b2 & 4b2 \\ 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \\ 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \\ 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \end{pmatrix} = 4bN$. On a pour $n = 1$ $N^1 = 1N$ donc $u_1 = 1$ convient. Soit $k \geq 1$ et supposons l'existence d'un réel u_k tel que $N^k = u_k N$ alors $N^{k+1} = NN^k = u_k N^2 = 4bu_k \cdot N$. Par récurrence, on en déduit la propriété demandée, et la récurrence définissant la suite u_n : $u_{n+1} = 4bu_n$. Comme u est géométrique de premier terme $u_1 = 1$, on a pour tout entier $k \geq 1$, $u_k = (4b)^{k-1}$. Pour $k = 0$, $N^0 = I$ donc ça ne marche pas.

   (b) Pas besoin de détailler : $M = N + (a - b)I$.

   (c) Il va bien falloir appliquer le binome de Newton, ce qu'on peut faire puisque les deux matrices commutent.

$$\begin{aligned} M^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (a-b)^{n-k} I^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} N^k \\ &= C_n^0 (a-b)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} N^k = (a-b)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (4b)^{k-1} N \\ &= (a-b)^n I + \frac{1}{4b} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (4b)^k - (a-b)^n \right) N \\ &= (a-b)^n I + \frac{(a+3b)^n - (a-b)^n}{4b} N. \end{aligned}$$

   On peut aussi s'en sortir par récurrence, puisque l'énoncé a eu la bonté de nous fournir le résultat.

2. On a pour tout n, $P_{X_n=i}(X_{n+1} = i) = 1/2$ et si $i \neq j$, $P_{X_n=j}(X_{n+1} = i) = 1/6$.

   (a) D'après la formule des probabilités totales, on a
      - $p(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}p(X_n = 0) + \frac{1}{6}p(X_n = 1) + \frac{1}{6}p(X_n = 2) + \frac{1}{6}p(X_n = 3)$
      - $p(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{6}p(X_n = 0) + \frac{1}{2}p(X_n = 1) + \frac{1}{6}p(X_n = 2) + \frac{1}{6}p(X_n = 3)$
      - $p(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{6}p(X_n = 0) + \frac{1}{6}p(X_n = 1) + \frac{1}{2}p(X_n = 2) + \frac{1}{6}p(X_n = 3)$
      - $p(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{6}p(X_n = 0) + \frac{1}{6}p(X_n = 1) + \frac{1}{6}p(X_n = 2) + \frac{1}{2}p(X_n = 3)$

   (b) On a donc $V_{n+1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/2 \end{pmatrix} V_n = M(1/2, 1/6)V_n$.

   (c) On montre par la récurrence habituelle que $V_n = M^n V_0$. Or

$$M^n = (\frac{1}{2} - \frac{1}{6})^n I + \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)^n}{4/6} N = \left(\frac{1}{3}\right)^n I + 3\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} N$$

.

Donc $V_n = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n I + 3\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} N \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\frac{1}{3})^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2} \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} \underset{n \to +\infty}{\to} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$