

# Corrigé des Exercices sur les Matrices 2

ECE1 Lycée Dumas

Mardi 13 mars 2007

Bon, il en manque encore un peu pour l'instant (c'est affreusement pénible de taper des pivots de Gauss ...) mais le premier exercice est complet (euh, presque, il manque  $E$ ). Manquent les exercices 2, 3 (mais on l'a corrigé en classe) et la fin de 10 (qu'on corrigera lundi de toute façon).

## Exercice 1

Un peu de motivation, six pivots de Gauss, ça va prendre quelques pages de calcul, mais ça ne peut pas faire de mal.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 21 & 7 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 21 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 2L_2 - 7L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & 18 & -42 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 7L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} -28 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 6 & 18 & -42 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -\frac{1}{28}L_1 \\ L_2 \leftrightarrow \frac{1}{42}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice  $A$  est donc inversible, et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 9L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 3L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 18 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{18}L_1 \\ L_2 \leftrightarrow -\frac{1}{9}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{9}L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

La matrice  $B$  est donc inversible, et  $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}.$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 11L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -25 & -11 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 6L_1 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -18 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -19 & -11 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -25 & -11 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + 18L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 17 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -25 & -11 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{6}L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{17}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{25}{6} & -\frac{11}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

La matrice  $C$  est donc inversible, et  $C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{17}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 2 & 1 & 0 \\ -\frac{25}{6} & -\frac{11}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 8L_1 - L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 8L_2 + 7L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 8 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -10 & 2 & 14 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & 4 & 12 \\ -10 & 2 & 14 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{16}L_1 \\ L_2 \leftrightarrow -\frac{1}{8}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{8}L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \\ \frac{4}{4} & -\frac{4}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

La matrice  $D$  est donc inversible, et  $D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{7}{4} \\ \frac{4}{4} & -\frac{4}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array}$$

On peut tricher un peu pour la matrice  $F$  en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, qui ne bougeront de toute façon pas pendant les calculs (sauf pour la toute dernière étape).

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1 \\ L_2 \leftrightarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice  $F$  est donc inversible, et  $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$

## Exercice 2

Déterminer les valeurs de  $\lambda$  et de  $\mu$  pour lesquels les matrices suivantes sont inversibles et, lorsque c'est possible, leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 1+x & -x \\ 0 & x & 1-2x \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

## Exercice 3

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $P$  est inversible et déterminer son inverse. Calculer  $P^{-1}AP$  et en déduire les puissances de la matrice  $A$ .

## Exercice 4

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x - y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = a \\ -3y = a - b \\ -2y - z = a - c \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = a \\ y = \frac{b-a}{3} \\ z = c - a - 2y \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + y - z \\ y = -\frac{a}{3} + \frac{b}{3} \\ z = -\frac{a}{3} - \frac{2}{3}b + c \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + b - c \\ y = -\frac{a}{3} + \frac{b}{3} \\ z = -\frac{a}{3} - \frac{2}{3}b + c \end{cases}
 \end{aligned}$$

On vient de résoudre le système  $AX = B$ , dont la solution est  $X = A^{-1}B$ . On en déduit que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 5

Commençons par calculer  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 \\ -5 & 9 & 10 \\ -5 & 5 & 14 \end{pmatrix}$ . on remarque que  $A^2 = 5A - 6I$ , donc  $5A -$

$A^2 = A(5I - A) = 6I$ , dont on déduit que  $A^{-1} = \frac{1}{6}(5I - A)$ , soit  $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Le

système qui suit est de la forme  $AX = B$ , avec  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ , donc l'unique solution

du système est  $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$ .

## Exercice 6

1. On obtient  $K^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire  $K^2 = -I$ .

2. On a donc  $K^{-1} = -K$ .

3. Calculons  $M^2 = (aI + bK)^2 = a^2I^2 + abIK + baKI + b^2K^2 = (a^2 - b^2)I + 2abK = (a^2 - b^2)I + 2a(M - aI) = 2aM - (a^2 + b^2)I$ .

4. Il faut avoir  $a^2 + b^2 \neq 0$  pour pouvoir écrire  $M^2 - 2aM = M(M - 2aI) = -(a^2 + b^2)I$ , donc  $M^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2}(2aI - M) = \frac{1}{a^2 + b^2}(aI - bK)$ .

5. La matrice  $A$  est égale à  $\sqrt{2}I + K$ , son inverse vaut donc  $\frac{1}{3}(\sqrt{2}I - K)$ , c'est-à-dire  $A^{-1} =$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & \sqrt{2}-1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \sqrt{2}+2 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 7

C'est en fait très simple : si  $A$  est symétrique, on a  $A = {}^t A$ . Par ailleurs,  $A^{-1}A = I$ . Si on transpose cette égalité, on obtient  ${}^t(A^{-1}A) = {}^t I$ , donc  ${}^t A {}^t A^{-1} = I$  ou encore  $A {}^t A^{-1} = I$ . On en déduit que  ${}^t A^{-1}$  est l'inverse de  $A$ , donc que  $A^{-1} = {}^t A^{-1}$  par unicité de l'inverse, donc  $A^{-1}$  est bien une matrice symétrique.

## Exercice 8

Si  $A$  est nilpotente, il existe un entier  $n$  tel que  $A^n = 0$ . Or, on constate que  $(I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}) = I - A^n = I$ , donc  $I - A$  est inversible, d'inverse  $I + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$ . On a  $A = I - M$ , avec  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Un rapide

calcul donne  $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $M^3 = 0$ . D'après ce qui précède, on a donc  $A^{-1} = I + M +$

$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . De même on a  $B = I - N$  avec  $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . On calcule

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , puis  $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et

enfin  $N^5 = 0$ , donc  $B^{-1} = I + N + N^2 + N^3 + N^4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## Exercice 9

1. Il suffit de prendre  $G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & 10 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

2. C'est une récurrence qui intervient toujours dans ce type d'exercice. Posons  $P_n : X_n = G^n X_0$ . La propriété  $P_0$  est évidente, et si on suppose  $P_n$  vraie, on a  $x_{n+1} = GX_n = G(G^n X_0) = G^{n+1} X_0$ , ce qui achève la récurrence.

3. Pour ne pas perdre la main, un petit pivot de Gauss :

$$\begin{array}{ccc}
 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \\
 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array} \\
 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftrightarrow 2L_2 \end{array} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} & 
 \end{array}$$

4. Un calcul inintéressant donne  $P^{-1}G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , puis  $P^{-1}GP = D$ . On en déduit

que  $G = PDP^{-1}$  (on multiplie à gauche par  $P$  et à droite par  $P^{-1}$ ) par récurrence que  $G^n = PD^nP^{-1}$  (en effet, c'est vrai pour  $n = 1$ , et si on suppose le résultat vérifié pour  $n$ , alors  $G^{n+1} = GG^n = PDP^{-1}PD^nP^{-1} = PDID^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$ ). Comme on sait que

$$D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on obtient } PD^n = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 2 \times (-1)^n & 2 & 0 \\ (-1)^n & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ puis}$$

$$G^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1} & 2 \times (-1)^n \\ 2(1 - (-1)^n) & 2((-1)^n - 1) & 6 - 4 \times (-1)^n \\ 1 - (-1)^n & (-1)^n - 1 & 3 + 2 \times (-1)^{n+1} \end{pmatrix}. \text{ Un lecteur attentif remarquera ai-}$$

sément que  $G^n$  ne dépend que de la parité de l'entier  $n$ , ce dont on aurait pu se rendre compte beaucoup plus facilement en calculant simplement  $G^3$  (qui est donc égale à  $G$ ), mais c'eût été beaucoup moins amusant, naturellement.

5. Il suffit de calculer  $G^n \times X_0$ , ce qui est trivial et donne  $u_n = (-1)^n$ ;  $v_n = 2(1 - (-1)^n)$  et  $w_n = 1 - (-1)^n$ . Autrement dit, si  $n$  est pair, on a  $u_n = 1$  et  $v_n = w_n = 0$  et si  $n$  est impair,  $u_n = -1$ ,  $v_n = 4$  et  $w_n = 2$ .

## Exercice 10

Un exemple de sujet de concours classique faisant intervenir probas et matrices (Ecricome 1993).

Les produits référencés  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  se partagent le marché. un consommateur n'utilisera qu'un seul de ces produits chaque mois. On note  $x_n$ ,  $y_n$  et  $z_n$ , la probabilité qu'il utilise les produits  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  au  $n^{\text{ième}}$  mois, où  $n$  est un entier naturel. On observe les données suivantes :  $x_0 = 0.1$ ,  $y_0 = 0.2$  et  $z_0 = 0.7$ . Par ailleurs des sondages ont permis de déterminer les intentions des consommateurs supposées constantes :

- Utilisant le produit  $X$  un mois donné, la probabilité qu'il utilise les produits  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  le mois suivant sont respectivement de : 40%, 30% et 30%.
- Utilisant le produit  $Y$  un mois donné, la probabilité qu'il utilise les produits  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  le mois suivant sont respectivement de : 30%, 40% et 30%.
- Utilisant le produit  $Z$  un mois donné, la probabilité qu'il utilise les produits  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  le mois suivant sont respectivement de : 20%, 10% et 70%.

1. C'est une application de la loi des probabilités totales qui ne devrait plus poser de problème :  $x_{n+1} = 0.4x_n + 0.3y_n + 0.2z_n$ ;  $y_{n+1} = 0.3x_n + 0.4y_n + 0.1z_n$  et  $z_{n+1} = 0.3x_n + 0.3y_n + 0.7z_n$ .

2. Un calcul simple donne  $AU_n + B = \begin{pmatrix} 0.2x_n + 0.1y_n + 0.2 \\ 0.2x_n + 0.3y_n + 0.1 \end{pmatrix}$ . Il faut utiliser le fait que  $x_n + y_n + z_n = 1$  pour retrouver ces formules :  $x_{n+1} = 0.4x_n + 0.3y_n + 0.2z_n = 0.4x_n + 0.3y_n + 0.2(1 - x_n - y_n) = 0.2x_n + 0.1y_n + 0.2$  et  $y_{n+1} = 0.3x_n + 0.4y_n + 0.1z_n = 0.3x_n + 0.4y_n + 0.1(1 - x_n - y_n) = 0.2x_n + 0.3y_n + 0.1$ , ce qui prouve la formule demandée.

3. Soit  $C = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  une matrice colonne. On a  $C = AC + B$  si  $a = 0.2a + 0.1b + 0.2$  et  $b = 0.2a + 0.3b + 0.1$ . La résolution de ce petit système donne  $a = \frac{1}{3}$  et  $b = \frac{2}{3}$ .
4. On a  $V_{n+1} = U_{n+1} - C = AU_n + B - C = AU_n - AC = A(U_n - C) = AV_n$ . On fait ensuite une démonstration par récurrence. Pour  $n = 0$ , on a  $V_0 = V_0$ , et si on suppose  $V_n = A^n V_0$ , alors  $V_{n+1} = AV_n = A \times A^n V_0 = A^{n+1} V_0$ .
5. (a) Je ne détaille pas, on obtient  $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ .
- (b) Pas de détail non plus, on obtient  $D = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$ .
- (c) On montre comme d'habitude que  $A^n = PD^nP^{-1}$ , ce qui donne  $A^n = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix}$
6. (a) En déduire les valeurs de  $x_n$  et  $y_n$  en fonction de  $n$ .
- (b) En déduire  $z_n$  en fonction de  $n$ .
- (c) Quelles sont à long terme les probabilités d'utiliser les produits  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  ?