

Devoir de rentrée : corrigé

MPSI Lycée Camille Jullian

1er septembre 2026

1. On commence par calculer le module $|z| = \sqrt{4 + 12} = 4$, puis on factorise : $z = 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}$, puisque $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Si on connaît ses formules, $\mathbb{P}(X = 1) = \binom{4}{1} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$.
3. On multiplie numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur : $A = \frac{(1 + 3\sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}{2^2 - \sqrt{3}^2} = 2 + \sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 9 = 11 + 7\sqrt{3}$.
4. On dérive bien sûr en utilisant la formule habituelle pour un produit : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x) - x \sin(x) - \cos(x) = -x \sin(x)$.
5. On commence par poser $X = e^x$ pour se ramener à l'équation du second degré $X^2 = 2X - 1$, soit $X^2 - 2X + 1 = 0$. On reconnaît ici une identité remarquable : $(X - 1)^2 = 0$. La seule valeur possible pour X est donc $X = 1$, soit $x = 0$, et $\mathcal{S} = \{0\}$.
6. Les solutions de l'équation différentielle proposée sont de la forme $y : x \mapsto Ke^x + 3$, avec $K \in \mathbb{R}$. Si on impose la condition supplémentaire $y(\ln(2)) = 1$, on doit donc avoir $2K + 3 = 1$, soit $K = -1$. La fonction recherchée est donc la fonction $f : x \mapsto 3 - e^x$.
7. Il y a cinq possibilités différentes au premier tirage, puis seulement quatre au deuxième et enfin trois au troisième (indépendamment des boules tirées). Le genre de processus qu'on peut facilement représenter par un bel arbre. En tout cas, ça nous fait un total de $5 \times 4 \times 3 = 60$ tirages.
8. Calculons donc : f est dérivable sur son domaine de définition $]0, +\infty[$, et $\forall x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$.
9. Puisque f est de la forme $\frac{1}{2}u'e^u$, avec $u(x) = x^2$, les primitives de f sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2} + K$, où K est une constante réelle. La condition supplémentaire $F(0) = 1$ impose $\frac{1}{2} + K = 1$, donc $K = \frac{1}{2}$ et $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{1}{2}$.
10. Puisqu'on nous le demande, on va donc faire une IPP en posant $u(x) = x$, donc $u'(x) = 1$, et $v'(x) = e^{2x}$ qu'on peut intégrer en $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. On obtient alors $I = \left[\frac{1}{2}xe^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^2 - \left[\frac{1}{4}e^{2x} \right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}$.
11. On a bien sûr très envie d'élever tout au carré, mais il faut d'abord se rendre compte que l'équation obtenue ne sera équivalente à l'équation initiale que si les deux membres sont positifs, autrement dit si $x \geq 1$. Notons d'ailleurs que, si $x < -2$, le membre de gauche n'est même pas défini, et élever au carré n'a plus aucun sens. Si $x \geq 1$, notre équation est donc équivalente à l'équation du second degré $x + 2 = (2x - 2)^2$, soit $x + 2 = 4x^2 - 8x + 4$, ou

encore $4x^2 - 9x + 2 = 0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 81 - 32 = 49$, et admet donc pour racines $x_1 = \frac{9+7}{8} = 2$ et $x_2 = \frac{9-7}{8} = \frac{1}{4}$. On constate sans surprise que x_1 est bien solution de l'équation initiale puisque $\sqrt{2+2} = 2 \times 2 - 2$, mais x_2 n'est pas solution : $\sqrt{\frac{1}{4}+2} = \frac{3}{2}$, alors que $2 \times \frac{1}{4} - 2 = -\frac{3}{2}$ (les nombres étant opposés, leurs carrés sont égaux, ce qui est cohérent avec la résolution effectuée). Finalement, $\mathcal{S} = \{2\}$.

12. Commençons par chercher un vecteur normal au plan, donc un vecteur $\vec{n} = (x, y, z)$ qui soit orthogonal simultanément aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}(3, 1, 1)$ et $\overrightarrow{AC}(2, -1, -6)$. En calculant les produits scalaires de $\vec{n}$ avec ces deux vecteurs, on constate que ses coordonnées doivent être solutions du système constitué des deux équations $3x + y + z = 0$ et $2x - y - 6z = 0$. En additionnant ces deux équations, on obtient la condition $5x - 5z = 0$, donc $x = z$, puis $y = -4x$ en reportant dans les équations initiales. On peut donc choisir $\vec{n} = (1, -4, 1)$, ce qui prouve que l'équation du plan (ABC) peut s'écrire sous la forme $x - 4y + z + d = 0$. En remplaçant par les coordonnées de l'un des trois points A , B et C , on trouve $d = -1$, donc une équation du plan est $x - 4y + z - 1 = 0$.
13. Le nombre $\frac{1}{3}$ est un rationnel non décimal, le nombre $\sqrt{2}$ (ou π) est réel mais pas rationnel.
14. Deux nombres réels ont la même valeur absolue si et seulement si ils sont égaux ou opposés. Deux possibilités donc : soit $2x + 4 = x - 2$, donc $x = -6$; soit $2x + 4 = 2 - x$, donc $x = -\frac{2}{3}$. Finalement, $\mathcal{C} = \left\{-6, -\frac{2}{3}\right\}$.
15. On calcule $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 3u_n + 3$. Or, pour tout réel x , le trinôme $x^2 - 3x + 3$ est strictement positif (son discriminant $\delta = 9 - 12$ est strictement négatif), donc $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout entier n , ce qui prouve que (u_n) est strictement croissante.
16. La fonction f est définie si et seulement si $\frac{1-x}{2x-4} > 0$ (condition qui éliminera naturellement la valeur interdite au dénominateur en passant). Le plus simple est sûrement de faire un tableau de signes :

x	1	2
$1-x$	+	-
$2x-4$	-	0
$\frac{1-x}{2x-4}$	-	+

Conclusion : $\mathcal{D}_f =]1, 2[$.

17. En observant directement le cercle trigonométrique (et en se rappelant des sinus des angles remarquables), on obtient directement $\mathcal{S} = \left[-\pi, \frac{\pi}{6} \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]\right]$.
18. Tous ceux qui feront une IPP pour cette question perdront du temps inutilement (même si on peut s'en sortir par cette méthode) : $\int_0^1 x^2 \sqrt{x} dx = \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} dx = \left[\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{7}$.
19. Si $u_{n+1} = 2u_n - 4$, alors $u_n = \frac{1}{2}u_{n+1} + 2$. En partant de $u_2 = 8$, on en déduit $u_1 = 6$ puis $u_0 = 5$.
20. Il est plus prudent de séparer le produit sous la forme $x^2 e^{-x} + e^{-x}$. On a bien sûr $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, mais aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ (croissance comparée), donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)e^{-x} = 0$.