

Devoir de rentrée

MPSI Lycée Camille Jullian

1er septembre 2026

Ce devoir est destiné à tester votre connaissance du programme de Terminale (essentiellement du programme de Spécialité, mais comme vous avez tous fait Maths Expertes l'an dernier, il y a aussi une ou deux questions portant sur les nombres complexes). Le principe en est très simple : 20 questions indépendantes, 20 points, un point par question (mais l'ordre des questions est complètement aléatoire, et leur difficulté variable). Attention toutefois : une question non traitée rapporte évidemment 0 point, mais une question traitée incorrectement **enlève un demi-point**, histoire de vous habituer à avoir confiance en vous quand vous faites un calcul.

1. Écrire le nombre complexe $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ sous forme exponentielle.
2. Une variable aléatoire suit une loi binômiale de paramètre $\left(4, \frac{1}{2}\right)$. Que vaut $\mathbb{P}(X = 1)$?
3. Simplifier l'écriture du nombre réel $A = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ (on veut un résultat de la forme $a + b\sqrt{3}$, avec a et b entiers).
4. Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x \cos(x) - \sin(x)$.
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} = 2e^x - 1$.
6. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y - 3$ vérifiant $y(\ln(2)) = 1$.
7. Une urne contient cinq boules numérotées de 1 à 5. On tire successivement dans cette urne trois boules dont on note le numéro, sans remettre les boules tirées dans l'urne après chaque tirage. Quel est le nombre total de tirages différents possibles ?
8. Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto x \ln(x) - x + 1$.
9. Donner l'unique primitive F de la fonction $f : x \mapsto xe^{x^2}$ vérifiant $F(0) = 1$.

10. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $I = \int_0^1 x e^{2x} dx$.
11. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+2} = 2x - 2$.
12. On considère dans l'espace les trois points $A(1, 1, 4)$, $B(4, 2, 5)$ et $C(3, 0, -2)$. Donner une équation cartésienne du plan (ABC) .
13. Donner un exemple de nombre rationnel qui ne soit pas décimal, ainsi qu'un exemple de nombre réel qui ne soit pas rationnel (sans justification).
14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|2x + 4| = |x - 2|$.
15. Démontrer que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 42$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 3$ est strictement croissante.
16. Quel est le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \ln \left(\frac{1-x}{2x-4} \right)$ (réponse à justifier) ?
17. Résoudre dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ l'inéquation $\sin(x) < \frac{1}{2}$ (un dessin suffira en guise de justification).
18. Calculer $\int_0^1 x^2 \sqrt{x} dx$.
19. La suite (u_n) vérifie la relation de récurrence suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 4$. Calculer la valeur de u_0 sachant que $u_2 = 8$.
20. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)e^{-x}$.